Eine optimale Suchstrategie für Straßen

Institut für Informatik — Report 97
Universität Freiburg

Sven Schuierer* Ines Semrau*

Zusammenfassung

Wir untersuchen das Problem eines Roboters, ein Ziel in einem unbekannten Polygon nur unter Zuhilfenahme der bereits erlangten Sichbarkeitsinformation zu finden. Eine *Straße* ist ein Polygon mit Start- und Zielpunkt, so daß auf jedem Weg vom Start zum Ziel das gesamte Polygon eingesehen werden kann. Für diese bereits intensiv untersuchte Polygonklasse stellen wir eine optimale On-line-Suchstrategie vor. Diese findet einen Weg zum Ziel, der höchstens $\sqrt{2}$-mal so lang ist wie der kürzeste Weg.

1 Einleitung

Ein wesentliches Problem im Bereich der Robotertechnik ist die Bewegungsplanung. Dabei ist es ein realistischer Ansatz, anzunehmen, daß der Roboter nicht von vornherein die gesamte Information über seine Umgebung kennt, sondern daß er diese Information erst nach und nach erlangt.

Wir befassen uns mit dem Problem, in einer unbekannten Umgebung ein visuell erkennbares Ziel zu finden. Da der Roboter erst nach und nach Kenntnis seiner Umgebung erhält, handelt es sich bei der Suchstrategie um eine On-line-Strategie, die mittels der von Sleator und Tarjan [ST85] eingeführten kompetitiven Analyse beurteilt werden kann. Eine Strategie ist *c-kompetitiv*, wenn sie nicht mehr als das c-fache der Kosten einer optimalen Lösung (bei Vorabkenntnis der vollständigen Information) erzeugt. Der Wert c ist der *kompetitive Faktor* der Strategie. Die Kosten werden in unserem Zusammenhang durch die Länge des zurückgelegten Weges repräsentiert.

Die Bewegung des Roboters, der im Vergleich zu seiner Umgebung sehr klein ist, wird durch die Bewegung eines Punktes in einem einfachen Polygon P simuliert. Zu jedem Zeitpunkt verfügt der Roboter über das Sichtbarkeitspolygon des aktuellen Standpunktes und über die bereits erhaltenen Sichtbarkeitspolygone der durchlaufe-

* Universität Freiburg, Institut für Informatik, Am Flughafen 17, D-79110 Freiburg.
e-mail: {schuiere,semrau}@informatik.uni-freiburg.de

nen Punkte im Polygon P. Das Sichtbarkeitspolygon wird ihm zum Beispiel von einem Lasersystem geliefert. Ein Punkt $p \in P$ ist von einem Punkt $q \in P$ aus *sichtbar*, wenn das Liniensegment pq ganz in P enthalten ist. Das *Sichtbarkeitspolygon* zum Punkt p ist die Menge aller von p aus sichtbaren Punkte aus P. Der weiße Bereich in Abbildung 2-1 auf Seite 4 ist hierfür ein Beispiel.

Die erste Polygonklasse, die eine Zielsuche mit *konstantem* kompetitiven Faktor erlaubt, ist die Klasse der sogenannten *Straßen* und wurde von Klein eingeführt [Kle92].

Definition 1 ([Kle92]) Sei P ein einfaches Polygon mit zwei ausgezeichneten Ecken, dem Startpunkt s und dem Zielpunkt t. Durch s und t wird der Polygonrand in zwei Teile, L (von s aus im Uhrzeigersinn) und R (im Gegenuhrzeigersinn), aufgeteilt. (P, s, t) heißt *Straße*, wenn von jedem Punkt auf L mindestens ein Punkt auf R sichtbar ist und umgekehrt.

Ein Beispiel für eine Straße ist in Abbildung 1-1 zu sehen. Äquivalent zur Straßendefinition ist, daß auf jedem Weg vom Start- zum Zielpunkt das gesamte Polygon eingesehen werden kann.

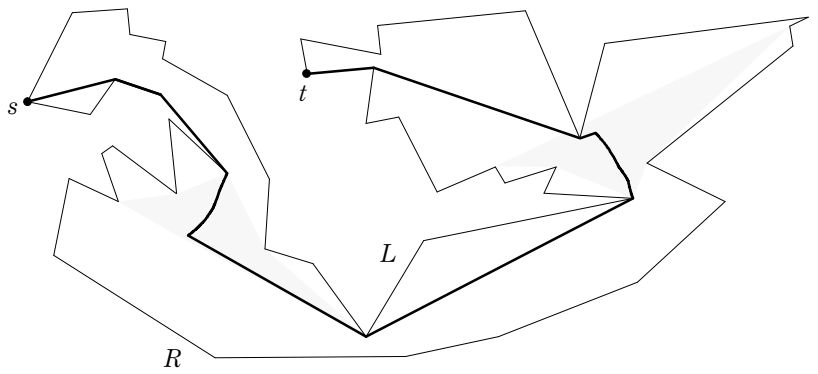


Abbildung 1-1: Ein von einer optimalen Strategie erzeugter Weg in einer Straße.

Die von Klein vorgeschlagene Strategie *lad* zur Zielsuche in Straßen basiert auf dem Ansatz, den absoluten lokalen Umweg (***l**ocal **a**bsolute **d**etour*) zu minimieren. Für den kompetitiven Faktor beweist er eine obere Schranke von $1 + 3/2\pi \approx 5.71$. Icking gibt eine bessere Schranke von ≈ 4.44 an [Ick94]. Es besteht eine recht große Lücke zum experimentell ermittelten kompetitiven Faktor; Klein gibt an, daß kein Beispiel gefunden wurde, für welches seine Strategie einen größeren Faktor als 1.8 erzeugt.

Kleinberg hat eine einfachere Strategie als *lad* vorgestellt und auf einfache Art einen kompetitiven Faktor von $2\sqrt{2} \approx 2.83$ bewiesen [Kle94]. In rechtwinkligen Straßen erreicht Kleinbergs Strategie den optimalen kompetitiven Faktor $\sqrt{2}$. Daß dieser Faktor optimal ist, erkennt man an dem in Abbildung 1-2 gezeigten einfachen Beispiel, welches bereits von Klein angegeben wurde [Kle92]. Wenn eine Strategie vom Startpunkt s aus nach links oder rechts einschlägt, bevor das Ziel t sichtbar ist, das Ziel jedoch auf der anderen Seite liegt, macht der Roboter einen größeren Umweg, als

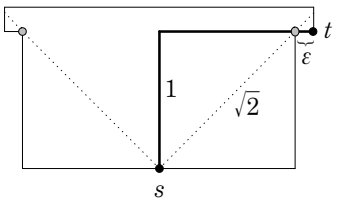


Abbildung 1-2: Eine untere Schranke für den kompetitiven Faktor einer jeden Suchstrategie für Straßen.

wenn er geradeaus nach oben geht, bis das Ziel sichtbar ist. Letzteres ist somit die beste Strategie und erreicht für $\varepsilon \to 0$ keinen besseren Faktor als $\sqrt{2}$. Trivialerweise gilt die untere Schranke auch für nicht-rechtwinklige Straßen, und die bislang noch offene Frage, ob ein Faktor von $\sqrt{2}$ in einer jeden solchen Straße mit einer optimalen Strategie tatsächlich eingehalten werden kann, wird in dieser Arbeit vollständig (positiv) geklärt.

Weitere Strategien als die bisher aufgeführten sind bereits von López-Ortiz und Schuierer und von Semrau vorgeschlagen worden. López-Ortiz und Schuierer erreichen mit ihrer Strategie *Move-in-Quadrant* einen kompetitiven Faktor von ≈ 2.05 und mit einer Hybridstrategie, die *Move-in-Quadrant* und eine Variante der Strategie *lad* verwendet, einen Faktor von ≈ 1.73 [LOS95, LOS96]. Ein etwas besseres Ergebnis findet sich in den Arbeiten der Autoren über eine Hybridstrategie mit kompetitivem Faktor $\pi/2 \approx 1.57$ [Sem96] bzw. einem Faktor von ≈ 1.52, letzterer wird erreicht durch eine leichte Strategiemodifikation [Sch96].

Im folgenden Abschnitt beschreiben wir zunächst eine generische *High-Level*-Strategie, mittels welcher das Ziel in einer Straße gefunden werden kann [Kle92]. Die *High-Level*-Strategie kann durch eine *Low-Level*-Strategie konkretisiert werden, die den Weg in den trichterförmigen schattierten Bereichen aus Abbildung 1-1 bestimmt. Die Güte der Gesamtstrategie hängt allein von der gewählten *Low-Level*-Strategie ab. Für die *Low-Level*-Strategie gibt es bereits optimale Teilstrategien, die wir im Abschnitt 3 durch die noch fehlende optimale Komponente ergänzen. Die so entstehende *Low-Level*-Strategie bildet dann zusammen mit der *High-Level*-Strategie eine optimale Strategie zur Zielsuche in Straßen.

2 Zielsuche in Straßen

Bei der Zielsuche lassen sich bestimmte Gegebenheiten ausnutzen, die aus der Straßeneigenschaft resultieren. Diese führen zu einer *High-Level*-Strategie, mit der das Ziel in einer Straße in jedem Fall gefunden wird. Wir werden diese lediglich beschreiben, Beweise finden sich bei Klein [Kle92], zum Teil vereinfachte Beschreibungen und Beweise finden sich bei López-Ortiz und Schuierer [LOS96] und Semrau [Sem96]. Wir verwenden die von López-Ortiz und Schuierer modifizierte Form der *High-Level*-Strategie [LOS96], bei der die *Low-Level*-Strategie nicht nur einen geradlinig anzusteuernden Punkt, sondern einen beliebigen Weg vorgeben kann. Der Einfachheit

halber setzen wir voraus, daß in den von uns betrachteten Straßen keine drei Ecken kollinear sind.

Wenn man sich das Sichtbarkeitspolygon des Roboters anschaut, anhand dessen er sich einen Weg durch die Straße suchen muß, so gibt es in der Regel diverse angrenzende Bereiche, sogenannte *Höhlen*, die er momentan nicht einsehen kann. Solange er das Ziel nicht sieht, muß es in einer solchen Höhle verborgen sein. Eine *Höhlenöffnung* ist eine in Sichtrichtung orientierte Kante des Sichtbarkeitspolygons, die keine Kante des Straßenpolygons ist. In Abbildung 2-1 ist der aktuelle Standpunkt p, und die Höhlenöffnungen sind die gepunkteten Pfeile. Den Anfangspunkt eines Pfeils nennen wir *Eingangsecke* der zugehörigen Höhle. Liegt eine Höhle links- (rechtsseitig) eines Pfeils, so handelt es sich um eine *linke* (*rechte*) *Höhle*; in Abbildung 2-1 sind die linken Höhlen mit l, die rechten mit r gekennzeichnet.

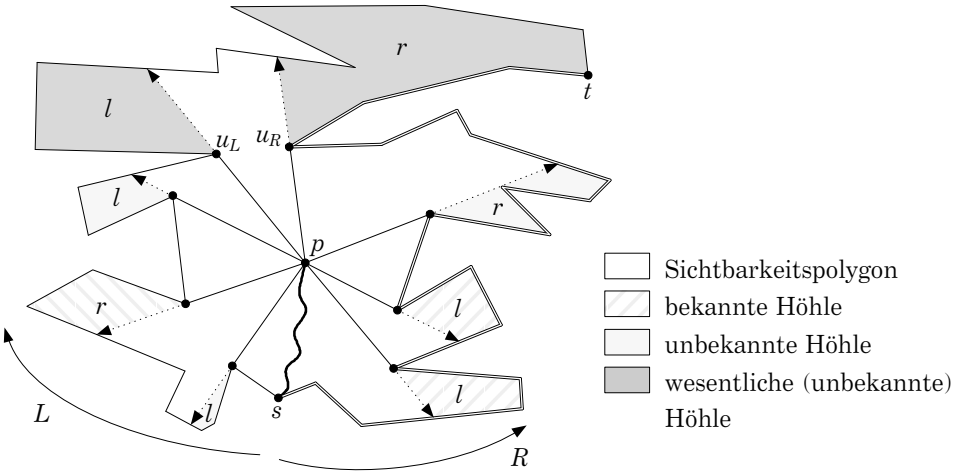


Abbildung 2-1: Das Ziel kann nur in einer der unbekannten wesentlichen Höhlen liegen.

Eine *bekannte Höhle* ist eine Höhle, die der Roboter bisher schon *vollständig* gesehen hat; eine Höhle, für die das nicht gilt, heißt *unbekannt*. Steht der Roboter in Abbildung 2-1 in p, so sind die schraffierten Höhlen bereits bekannt, da er sie auf dem Weg von s nach p einsehen konnte, die anderen Höhlen sind unbekannt. Aus der Straßeneigenschaft folgt, daß jede Eingangsecke einer unbekannten linken (rechten) Höhle zu L (R) gehört. Die Höhle, in der das Ziel liegt, nennen wir *Zielhöhle*; in Abbildung 2-1 ist das die Höhle mit Eingangsecke u_R.

Betrachtet man nur die unbekannten Höhlen, so folgen die linken und rechten jeweils aufeinander. Nur die äußersten dieser Höhlen können das Ziel enthalten, genauer gesagt: wenn man den Rand des Sichtbarkeitspolygons startend in einem Punkt auf L (R) im Uhrzeigersinn (Gegenuhrzeigersinn) verfolgt, so ist von den rechten (linken) unbekannten Höhlen nur diejenige, auf die man zuerst trifft, eine mögliche Zielhöhle. Die beiden möglichen Zielhöhlen nennen wir *wesentliche Höhlen*, die zugehörigen Eingangsecken *wesentliche Eingangsecken*.

Wenn der Roboter in einem Punkt p steht und keine wesentliche Höhle existiert, muß das Ziel sichtbar sein, welches er direkt ansteuern kann. Falls es nur *eine* wesentliche Höhle gibt, zum Beispiel die hinter der Ecke u_R in Abbildung 2-2(a), kann er ihre Eingangsecke ansteuern, da das Ziel dahinter verborgen sein muß. Der einzige schwierige Fall tritt auf, wenn es zwei wesentliche Höhlen (eine linke und eine rechte) gibt und diese nicht mit der Roboterposition kollinear sind. Liegt Kollinearität vor, kann der Roboter die nähere der Eingangsecken geradlinig ansteuern; siehe Abbildung 2-2(b). Im anderen Fall muß er sich möglichst geschickt weiter voranbewegen ohne sich allzuweit von einer der beiden Eingangsecken zu entfernen und sich dabei dem Liniensegment nähern, welches die beiden wesentlichen Eingangsecken verbindet.

Es ist möglich, daß bei wachsender Einsicht in die aktuellen wesentlichen Höhlen neue Eingangsecken auftauchen, die dann ihrerseits die neuen wesentlichen Höhlen definieren. Zum Beispiel wird in Abbildung 2-2(c) bei Erreichen des verlängerten Liniensegmentes $u_{L,2}u_{L,1}$ in q die neue linke Ecke $u_{L,2}$ auf dem linken Höhlenrand sichtbar und übernimmt die Rolle der vorherigen linken wesentlichen Eingangsecke $u_{L,1}$.

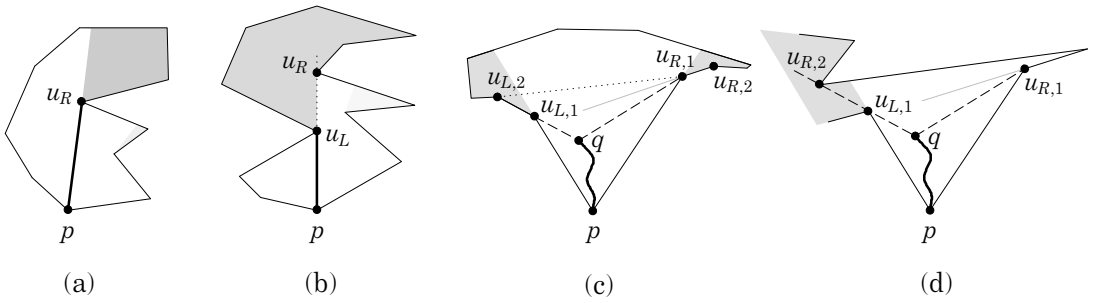


Abbildung 2-2: (a) Der Weg führt zur einzigen wesentlichen Eingangsecke.
(b) Der Weg führt zur näheren der beiden wesentlichen Eingangsecken.
(c) In den wesentlichen Höhlen erscheinen neue wesentliche Eingangsecken.
(d) Eine neue wesentliche rechte Ecke in einer linken Höhle.

Die Situation, in der es aus der Sicht des Roboters *zwei* mögliche Zielhöhlen gibt, kann auf unterschiedliche Art beendet werden. Es kann das Ziel in einer der beiden Höhlen sichtbar werden. Oder es wird eine rechte (linke) Ecke in einer linken (rechten) Höhle sichtbar, so daß in diesem Moment die wesentlichen Eingangsecken mit der Roboterposition kollinear sind und die nähere der beiden angesteuert werden kann; siehe Abbildung 2-2(d). Eine weitere Möglichkeit besteht darin, daß eine bereits sichtbare Ecke zu einer wesentlichen Eingangsecke wird, wie in Abbildung 2-3 dargestellt. Im Wegpunkt q' wird die Ecke $u_{R,2}$ zunächst zur Eingangsecke einer Höhle, allerdings einer bekannten, denn das doppelt gezeichnete Randstück hat der Roboter schon gesehen. Wir gehen davon aus, daß auf der Verlängerung dieses Stückes keine neue Ecke sichtbar wird, sonst läge der Fall aus Abbildung 2-2(d) vor. Im Punkt q wird die Roboterposition mit $u_{R,2}$ und $u_{L,1}$ kollinear. Hier wird $u_{R,2}$ zu einer wesentlichen Eingangsecke, denn die zugehörige Höhle wird vom noch nicht vollständig bekannten Polygonrandstück von $u_{L,1}$ bis $u_{R,2}$ (im Uhrzeigersinn) begrenzt. Die Ecke

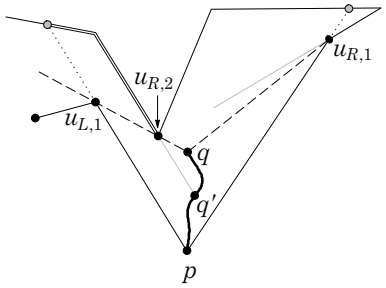


Abbildung 2-3: Ein im Punkt p bereits sichtbar gewesener Teil des Straßenpolygonrandes wird Teil einer wesentlichen Höhle.

$u_{R,1}$ wird von $u_{R,2}$ abgelöst, und wegen der Kollinearität begibt sich der Roboter wieder zur näheren der beiden wesentlichen Eingangsecken $u_{L,1}$ und $u_{R,2}$, also zu $u_{R,2}$.

Schließlich kann es auch noch sein, daß keine neue Ecke mehr sichtbar wird. Dann wird jedoch noch vor Erreichen des Liniensegmentes, das die beiden aktuellen wesentlichen Eingangsecken verbindet, eine der beiden wesentlichen Höhlen einsehbar [Kle92], so daß es nur noch eine mögliche Zielhöhle gibt und ihre Eingangsecke direkt angesteuert werden kann.

Die oben beschriebene mit *High-Level*-Strategie benannte Zielsuche sieht als Algorithmus formuliert wie folgt aus.

```
 1  procedure HLS is
 2    uL, uR: wesentliche Eingangsecken;    -- können undefiniert sein
 3  begin    -- High-Level-Strategie
 4    Bestimme uL und uR;
 5    repeat
 6      case Anzahl der wesentlichen Eingangsecken is
 7        when 0 ⇒ Gehe zum Ziel;     --     keine wesentlichen Eingangsecken
 8                                     -- ⇔ das Ziel ist sichtbar
 9        when 1 ⇒ Gehe geradlinig zu dieser einen Eingangsecke;
10                 Bestimme uL und uR;
11        when 2 ⇒
12          if uL, uR und Roboterposition sind kollinear then
13            Gehe zur näher gelegenen Eingangsecke (uL oder uR);
14            Bestimme uL und uR;
15          else
16            Bestimme einen Weg, der zu einem Punkt des Liniensegmentes
17                 führt, welches uL und uR verbindet;
18            Folge diesem Weg bis sich uL oder uR ändert;
19          end if;
20      end case;
21    until Ziel erreicht;
22  end HLS;
```

In Zeile 4 wird mit der Bestimmung der wesentlichen Eingangsecken im Startpunkt s begonnen, von dem aus der Anfang der polygonalen Ketten L und R erkenn-

bar ist. Die Anzahl der Eingangsecken in Zeile 6 ergibt sich daraus, ob uL und uR definiert sind; anhand dieser Anzahl wird dann unterschieden und wie oben beschrieben vorgegangen. In Zeile 16 ist noch offen, wie der Weg zu einem Punkt des Liniensegmentes gewählt wird, welches die wesentlichen Eingangsecken verbindet. Dies bleibt der *Low-Level*-Strategie überlassen. Sie bearbeitet den Fall, der mit dem Erkennen zweier wesentlicher Eingangsecken beginnt (die nicht mit der Roboterposition kollinear sind) und in dem möglicherweise neue wesentliche Eingangsecken in den aktuellen wesentlichen Höhlen auftauchen. Diesen Fall hatten wir in Abbildung 2-2(c) betrachtet. Wir sprechen von einem *Trichter*, den der Roboter durchwandern muß.

Definition 2 ([Kle92]) Zwei in einem gemeinsamen Punkt beginnende konvexe polygonale Ketten T_L und T_R bilden einen *Trichter*, wenn von jedem Punkt von T_L ein Punkt von T_R sichtbar ist und umgekehrt.

Ein Beispiel für einen Trichter zeigt Abbildung 2-4(a). Den ersten Wegpunkt, in dem es für den Roboter zwei mögliche Zielhöhlen gibt, nennen wir *Anfangspunkt* des Trichters und bezeichnen ihn mit p_1. In einem solchen Punkt sind also zwei wesentliche Eingangsecken erstmalig gemeinsam sichtbar. Wir betrachten die beiden polygonalen Ketten T_L und T_R als vom Trichteranfangspunkt zum jeweiligen Endpunkt orientiert. Bezüglich dieser Orientierung sind die zu einem Wegpunkt p_i gehörenden wesentlichen Eingangsecken die in p_i *sichtbaren letzten Ecken* von T_L und T_R, die wir mit v_i und w_i bezeichnen. Den Winkel zwischen p_1w_1 und p_1v_1 nennen wir *Anfangswinkel* des Trichters, den Winkel zwischen p_iw_i und p_iv_i *Sichtwinkel* des Roboters.

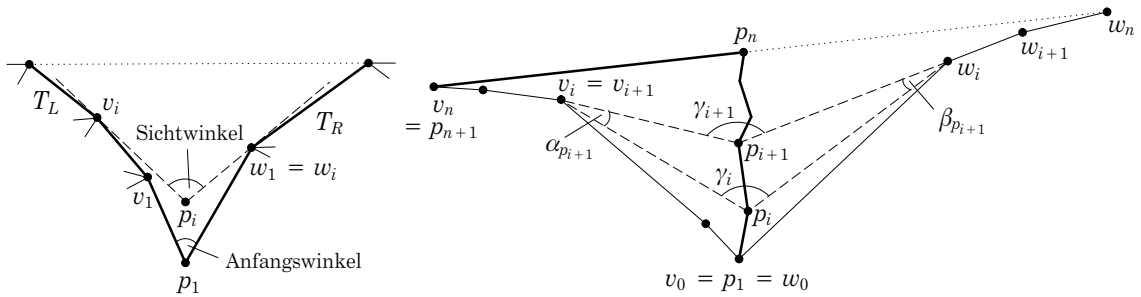


Abbildung 2-4: Veranschaulichung der Bezeichnungen.

Der kompetitive Faktor der Gesamtstrategie hängt nur von der Wahl des Weges in einem Trichter und somit von der *Low-Level*-Strategie ab, da der Roboter sonst auf dem kürzesten Weg geht. Denn liegt das Ziel in einer Höhle, so führt der kürzeste Weg zum Ziel über die Eingangsecke dieser Höhle [Kle94]. Außerhalb von Trichtern verläuft der Weg geradlinig über die Eingangsecken von Zielhöhle zu Zielhöhle, die der Roboter immer dann identifizieren kann, wenn es höchstens eine wesentliche Höhle gibt oder wenn beide Ecken mit seiner Position kollinear sind.

Es existieren bereits *Low-Level*-Strategien, die bei Kombination mit einer c-kompetitiven Strategie für Anfangswinkel $\geq \pi/2$, zu der man (in Trichtern mit Anfangswinkel $< \pi/2$) bei Erreichen des Sichtwinkels $\pi/2$ übergeht, eine c-kompetitive Strategie für beliebige Trichter ergeben. Als Startstrategie für Anfangswinkel $< \pi/2$ eignen sich zum Beispiel die Strategien *clad* [LOS96] oder *ba* [Sem96]; letztere wurde unabhängig auch von López-Ortiz vorgestellt und ausführlich analysiert [LO96]. Es gilt das folgende Lemma.

Lemma 1 ([LOS96, Sem96]) *Eine* c*-kompetitive* Low-Level-*Strategie, die für Trichter mit Anfangswinkel* $\geq \pi/2$ *einen Weg bis zum Trichterende erzeugt, ergibt bei Kombination mit der Strategie* ba *oder* clad *unter Einbettung in die* High-Level-*Strategie eine* c*-kompetitive Strategie zur Zielsuche in Straßen.

In der Straße in Abbildung 1-1 (Seite 2) ist ein von der *High-Level*-Strategie erzeugter Weg eingezeichnet. Die *Low-Level*-Strategie, die zu den Wegen in den schattierten Trichtern gehört, werden wir im nächsten Abschnitt kennenlernen. Da wir davon ausgehen, daß keine drei Ecken kollinear sind, müssen wir das Trichterende nicht erreichen, sondern uns nur beliebig dicht daran annähern. Der Sichtwinkel hat somit immer einen Wert $< \pi$. Ist in einer Abbildung der Weg bis zum Trichterende eingezeichnet, so ist darunter eine beliebige Annäherung zu verstehen.

Der Anfangswinkel im Punkt p_1 hat in den von uns zu betrachtenden Trichtern einen Wert $\geq \pi/2$ wie in Abbildung 2-4(b), und wir legen zunächst einige weitere Bezeichnungen fest. Der Punkt p_n sei der Wegpunkt, in dem ersichtlich wird, welche der aktuellen Ecken auf dem kürzesten Weg liegt. Der Sichtwinkel in einem Wegpunkt p_i sei γ_i, ferner sei $\delta_i := \gamma_i/2 - \pi/4$. Wir setzen $v_0 := w_0 := p_1$. Der Wegpunkt p_{n+1} sei die Ecke auf dem kürzesten Weg, also v_n beziehungsweise w_n, und wir definieren $\gamma_{n+1} := \gamma_n$. Für einen Punkt q im Dreieck $v_i p_i w_i$ bezeichnen wir den Winkel zwischen $v_i p_i$ und $v_i q$ mit α_q und den Winkel zwischen $w_i p_i$ und $w_i q$ mit β_q.

Die Länge eines Weges W bezeichnen wir mit $|W|$, somit ist $|ab|$ die Länge des Liniensegmentes ab. Für zwei Punkte a und b eines Polygons P ist $W(a,b)$ der *von einer Strategie S erzeugte Weg* von a nach b, mit $K(a,b)$ wird hingegen der *kürzeste Weg* von a nach b in P bezeichnet. Dabei ist jeweils aus dem Zusammenhang ersichtlich, um welche Strategie S und welches Polygon P es sich handelt. In einem Trichter ist der kürzeste Weg eine der beiden begrenzenden polygonalen Ketten.

3 Die Strategie *glad*

In diesem Abschnitt wird die *Low-Level*-Strategie *glad* vorgestellt, die für Trichter mit Anfangswinkel $\geq \pi/2$ den kompetitiven Faktor $\sqrt{2}$ hat. Sie ist eine Verallgemeinerung der Strategie *clad* von López-Ortiz und Schuierer [LOS96].

Wir setzen der Einfachheit halber voraus, daß in jedem Wegpunkt maximal eine neue Ecke (entweder eine linke oder eine rechte) sichtbar wird. Soweit nicht anders erwähnt, gilt stets die Voraussetzung $|p_i v_i| \leq |p_i w_i|$. Die Betrachtung für den Fall $|p_i v_i| > |p_i w_i|$ ist jeweils analog.

3.1 Vorstellung und Korrektheit der Strategie

Bevor wir zur Strategie *glad* kommen, gehen wir kurz auf die Strategie *clad* von López-Ortiz und Schuierer [LOS96] ein, welche auf der Strategie *lad* von Klein [Kle92] basiert. Für zwei Punkte p_i und p_{i+1} (wobei in p_{i+1} das Segment v_iw_i noch nicht erreicht ist) ist genau dann die *lad*-Bedingung erfüllt, wenn gilt

$$\begin{aligned} & |p_ip_{i+1}| + |p_{i+1}v_i| - |p_iv_i| = |p_ip_{i+1}| + |p_{i+1}w_i| - |p_iw_i| \\ \Leftrightarrow \quad & |p_iv_i| - |p_{i+1}v_i| = |p_iw_i| - |p_{i+1}w_i|. \end{aligned}$$

In Abbildung 3-1 ist ein entsprechender Punkt p_{i+1} eingezeichnet. Bei der Strategie *clad* muß die *lad*-Bedingung für je zwei Punkte p_i und p_{i+1} auf dem von *clad* erzeugten Weg, wobei frühestens in p_{i+1} eine neue Ecke sichtbar wird, erfüllt sein.

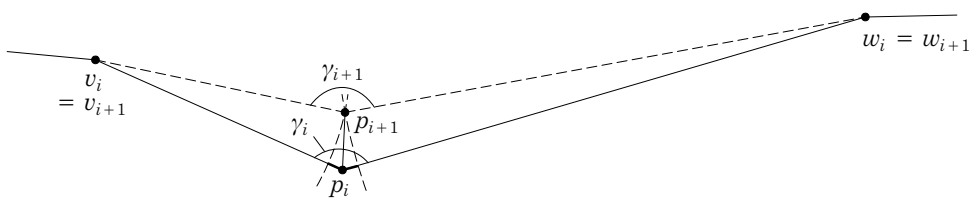


Abbildung 3-1: Für p_i und p_{i+1} ist die *lad*-Bedingung erfüllt.

Bei der Strategie *glad* hingegen werden die Längen der Liniensegmente mit einem Faktor versehen, und die Bedingung, die für je zwei solche Punkte p_i und p_{i+1} erfüllt sein muß, lautet

$$|p_iv_i|\,g(\gamma_i) - |p_{i+1}v_i|g(\gamma_{i+1}) = |p_iw_i|\,g(\gamma_i) - |p_{i+1}w_i|g(\gamma_{i+1}) \quad (\textit{glad}\text{-Bedingung})$$

mit

$$g : [\pi/2, \pi] \to [0,1],\ g(\gamma) = \cos\Big(\frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\Big).$$

Für einen Wegpunkt p_i und einen Punkt q im Dreieck $v_ip_iw_i$ mit Sichtwinkel γ_q definieren wir

$$\begin{aligned} l_{p_i,q} &:= |p_iv_i|\,g(\gamma_i) - |qv_i|g(\gamma_q) & D^l_{p_i,q} &:= |p_iq|\,/l_{p_i,q} \\ r_{p_i,q} &:= |p_iw_i|\,g(\gamma_i) - |qw_i|g(\gamma_q) & D^r_{p_i,q} &:= |p_iq|\,/r_{p_i,q}. \end{aligned}$$

Die Definitionen gelten insbesondere für die Wegpunkte im Dreieck $v_ip_iw_i$. In Abbildung 3-2 sind Segmente mit den Längen $l_{p_i,p_{i+1}}$ und $r_{p_i,p_{i+1}}$ für zwei Punkte p_i und p_{i+1}, die die *glad*-Bedingung erfüllen, eingezeichnet. In die Bedingung gehen die Sichtwin-

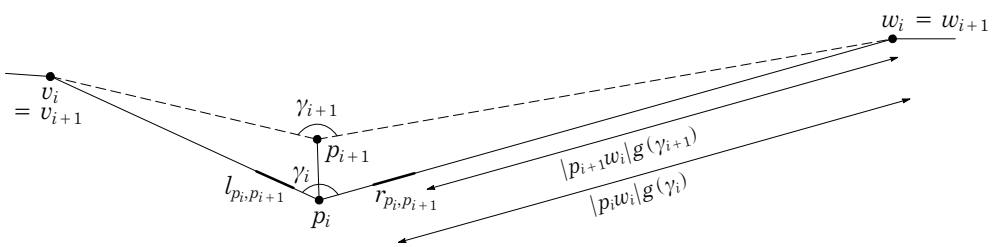


Abbildung 3-2: Für p_i und p_{i+1} ist die *glad*-Bedingung erfüllt.

kel in den beiden Punkten mit ein. Punkte, die auf einem von der Strategie *glad* erzeugten Weg liegen, bezeichnen wir als *glad*-Punkte. Wenn wir hingegen sagen, daß zwei Punkte die *glad*-Bedingung erfüllen, verstehen wir darunter, daß es zwei *glad*-Punkte sind und daß zusätzlich zwischen ihnen keine neue Ecke sichtbar wird. Für zwei *glad*-Punkte p_i und p_{i+1} heißt das, daß $v_i = v_{i+1}$ und $w_i = w_{i+1}$ gilt.

Die Strategie *clad* kann als Variante von *glad* aufgefaßt werden: die Funktion g wäre in diesem Fall konstant 1.

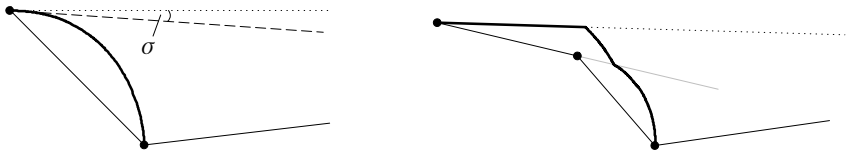
In den Fällen, in denen bei der Strategie *lad* und auch *clad* ein ungünstig großer Umweg entsteht, verläuft der Weg bei *glad* günstiger, da für größere Sichtwinkel der Weg stärker zur kürzeren Seite hingelenkt wird. Ein Beispiel ist in Abbildung 3-3 zu sehen.

lad: Weglängenverhältnis 1.56 (a)

glad: Weglängenverhältnis 1.28 (b)

Abbildung 3-3: Ein Beispiel für *lad* und *glad*.

Wie ein Weg bei der Strategie *glad* durch Auftauchen einer neuen Ecke beeinflußt wird, ist beispielhaft in Abbildung 3-4(b) zu sehen.



(a) (b)

Abbildung 3-4: *glad* stetig ausgeführt.

Es ist möglich, eine ungefähre Vorstellung über den Verlauf des Weges der Strategie *glad* zu erhalten, wenn man nur von einigen wenigen Punktepaaren fordert, daß sie die *glad*-Bedingung erfüllen. Ein solcher Weg ist in Abbildung 3-5 dargestellt. Jedes Punktepaar (p_i, p_{i+1}) muß also so gewählt sein, daß frühestens in p_{i+1} eine neue Ecke sichtbar wird. In Abbildung 3-5 taucht auf dem Weg keine neue Ecke auf, und je zwei der Punkte p_1, p_2, p_3 und p_4 erfüllen die *glad*-Bedingung. Dies bezieht sich nicht nur auf benachbarte Punkte, denn ist die *glad*-Bedingung für zwei Punktepaare (p_i, p_{i+1}) und (p_{i+1}, p_{i+2}) erfüllt, so ist sie es auch für das Punktepaar (p_i, p_{i+2}), da gilt

$$\begin{aligned} l_{p_i,p_{i+2}} &= |p_iv_i|g(\gamma_i) - |p_{i+2}v_i|g(\gamma_{i+2}) \\ &= |p_iv_i|g(\gamma_i) - |p_{i+1}v_i|g(\gamma_{i+1}) + |p_{i+1}v_i|g(\gamma_{i+1}) - |p_{i+2}v_i|g(\gamma_{i+2}) \\ &= l_{p_i,p_{i+1}} + l_{p_{i+1},p_{i+2}} \quad \text{wegen } v_i = v_{i+1}, \end{aligned}$$

entsprechend für $r_{p_i,p_{i+2}}$.

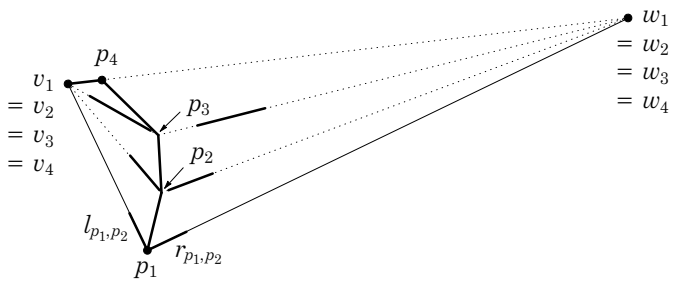


Abbildung 3-5: Nur einige Punktepaare erfüllen die *glad*-Bedingung.

In Abbildung 3-5 sind auf p_iv_i und p_iw_i für $1 \le i \le 3$ die Segmente der Länge $l_{p_i,p_{i+1}} = r_{p_i,p_{i+1}}$ eingezeichnet. Den von der Strategie *glad* erzeugten Weg erhält man aus dem Weg in Abbildung 3-5, indem man immer weitere Punkte zwischen p_1 und p_4 einfügt, die mit p_1 die *glad*-Bedingung erfüllen. Der Weg, der so entsteht, war bereits in Abbildung 3-3(b) zu sehen.

Bevor wir zu Lemma 2 kommen, führen wir die Definitionsbereiche der im folgenden auftretenden Variablen auf und stellen grundlegende Aussagen (Additionstheoreme u. ä.) zusammen, die in den Beweisen oft ohne ausdrückliche Erwähnung verwendet werden.

Definitionsbereiche (soweit im Text keine weiteren Einschränkungen angegeben werden):

$$\frac{\pi}{2} \le \gamma_i < \gamma_{i+1} < \pi$$
$$0 \le \delta_i = \frac{\gamma_i}{2} - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$$
$$\alpha_q + \beta_q \le \pi - \gamma_i$$

Grundlegende Aussagen:

(1)
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

(2)
$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(3)
$$\tan\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

(4)
$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

(5)
$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}, \quad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

(6)
$$\sin(\gamma + \alpha)\cos\delta - \sin\gamma\cos(\alpha + \delta)$$
$$= (\sin\gamma\cos\alpha + \cos\gamma\sin\alpha)\cos\delta - \sin\gamma(\cos\alpha\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta)$$
$$= \sin\alpha(\cos\gamma\cos\delta + \sin\gamma\sin\delta)$$
$$= \sin\alpha\cos(\gamma - \delta)$$

Lemma 2 *Sei q ein Punkt im Dreieck $v_i p_i w_i$. Der Winkel zwischen $p_i q$ und $p_i v_i$ sei $\gamma_i^l(q)$, der Winkel zwischen $p_i w_i$ und $p_i q$ sei $\gamma_i^r(q)$; siehe Abbildung 3-6. $D_{p_i,q}^l$ und $D_{p_i,q}^r$ seien wie auf Seite 9 definiert und die übrigen Bezeichnungen wie auf Seite 8 festgelegt. Dann gilt*

$$D_{p_i,q}^l = \frac{\sin\alpha_q}{\sin\big(\gamma_i^l(q) + \alpha_q\big)\cos\delta_i - \sin\gamma_i^l(q)\cos\Big(\delta_i + \frac{\alpha_q+\beta_q}{2}\Big)}$$

$$D_{p_i,q}^r = \frac{\sin\beta_q}{\sin\big(\gamma_i^r(q) + \beta_q\big)\cos\delta_i - \sin\gamma_i^r(q)\cos\Big(\delta_i + \frac{\alpha_q+\beta_q}{2}\Big)}.$$

Beweis. Für $\gamma_i^l(q)$ und $\gamma_i^r(q)$ schreiben wir kurz γ_i^l und γ_i^r, der Sichtwinkel im Punkt q sei mit γ_q bezeichnet. Für die linke Seite gilt, indem wir Zähler und Nenner durch $|p_i q|$ teilen und den Sinussatz im Dreieck $v_i p_i w_i$ anwenden,

$$\begin{aligned} D_{p_i,q}^l = \frac{|p_i q|}{|p_i v_i| g(\gamma_i) - |q v_i| g(\gamma_q)} &= \frac{\sin\alpha_q}{\sin\big(\pi - \gamma_i^l - \alpha_q\big) g(\gamma_i) - \sin\gamma_i^l\, g(\gamma_i + \alpha_q + \beta_q)} \\ &= \frac{\sin\alpha_q}{\sin\big(\gamma_i^l + \alpha_q\big)\cos\delta_i - \sin\gamma_i^l\cos\Big(\delta_i + \frac{\alpha_q+\beta_q}{2}\Big)}. \end{aligned}$$

Analog ergibt sich für die rechte Seite

$$\begin{aligned} D_{p_i,q}^r = \frac{|p_i q|}{|p_i w_i| g(\gamma_i) - |q w_i| g(\gamma_q)} &= \frac{\sin\beta_q}{\sin\big(\pi - \gamma_i^r - \beta_q\big) g(\gamma_i) - \sin\gamma_i^r\, g(\gamma_i + \alpha_q + \beta_q)} \\ &= \frac{\sin\beta_q}{\sin\big(\gamma_i^r + \beta_q\big)\cos\delta_i - \sin\gamma_i^r\cos\Big(\delta_i + \frac{\alpha_q+\beta_q}{2}\Big)}. \end{aligned}$$

□

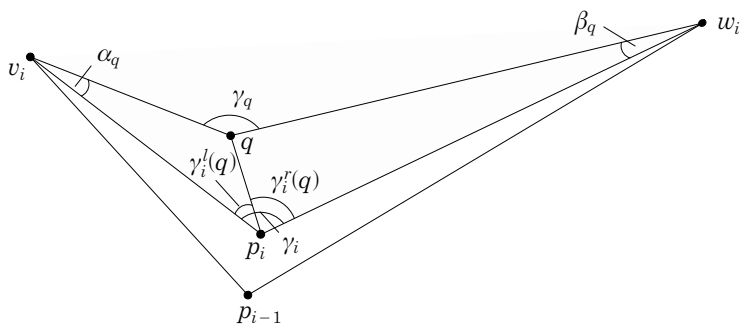


Abbildung 3-6: Illustration zum Beweis von Lemma 2.

Bevor wir die Güte der Strategie analysieren, zeigen wir, daß mit ihr von p_1 aus immer ein Punkt erreicht werden kann, der beliebig dicht bei $v_n w_n$ liegt. Dazu untersuchen wir einen Teilweg im Dreieck $v_i p_i w_i$ unter der allgemeinen Voraussetzung $|p_i v_i| \le |p_i w_i|$ von Seite 8.

Lemma 3 *In einem Dreieck $v_i p_i w_i$ wird von der Strategie* glad *ein Weg erzeugt, der auf $v_i w_i$ zuläuft, solange keine neue Ecke sichtbar wird und nicht ersichtlich ist, welche der Ecken v_i oder w_i angesteuert werden muß. Der Weg verläuft im Inneren des Dreiecks $v_i p_i w_i$ links von oder auf der Winkelhalbierenden von γ_i, und in jedem Punkt p_k auf diesem Weg gilt $l_{p_i,p_k} = r_{p_i,p_k} > 0$.*

Beweis. Wir untersuchen, unter welchen Bedingungen ein Wegpunkt p_k zu einem gegebenen Sichtwinkel $\gamma_k > \gamma_i$ existiert und wo er sich befindet. Alle Punkte mit Sichtwinkel γ_k befinden sich auf einem Kreisbogen $C(\gamma_k)$ durch v_i und w_i, siehe Abbildung 3-7. Der Kreisbogen $C(\gamma_k)$ schneide $p_i v_i$ im Punkt u_k, der Punkt mit Sichtwinkel γ_k auf der Winkelhalbierenden von γ_i sei q_0.

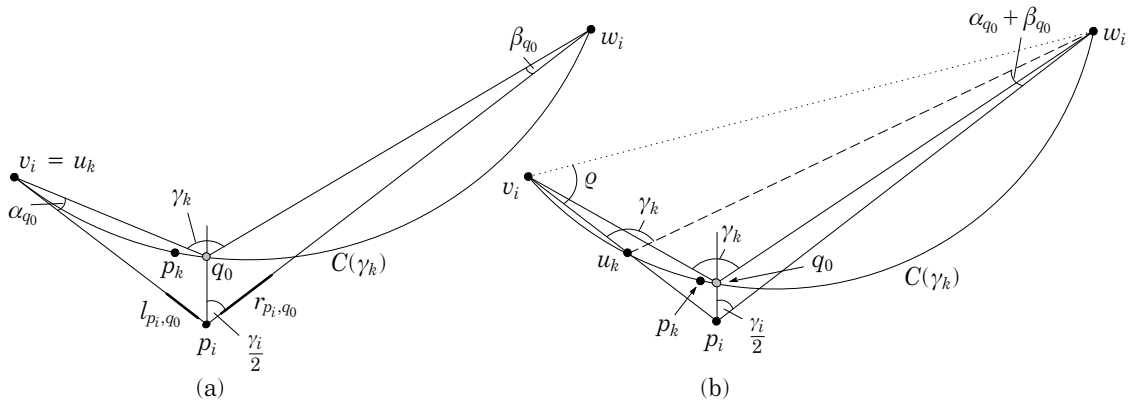


Abbildung 3-7: Welcher Punkt mit Sichtwinkel γ_k erfüllt mit p_i die *glad*-Bedingung?

Wenn im Punkt u_k die Bedingung $l_{p_i,u_k} > r_{p_i,u_k}$ und im Punkt q_0 die Bedingung $l_{p_i,q_0} \leq r_{p_i,q_0}$ erfüllt ist, existiert zwischen u_k (ausschließlich) und q_0 (einschließlich) auf $C(\gamma_k)$ genau ein Punkt p_k, in dem $l_{p_i,p_k} = r_{p_i,p_k}$ gilt, denn für einen Punkt q, der sich entlang $C(\gamma_k)$ bewegt, ändern sich $l_{p_i,q}$ und $r_{p_i,q}$ mit qv_i und qw_i stetig und monoton. $C(\gamma_k)$ ist dabei wegen $\gamma_k \geq \pi/2$ höchstens ein Halbkreis.

Wir zeigen zunächst, daß $l_{p_i,q_0} \leq r_{p_i,q_0}$ erfüllt ist und untersuchen dazu $D^l_{p_i,q_0}$ und $D^r_{p_i,q_0}$. Unter der allgemeinen Voraussetzung $|p_i v_i| \leq |p_i w_i|$ von Seite 8 gilt $\beta_{q_0} \leq \alpha_{q_0}$. Für $D^l_{p_i,q_0}$ gilt ausgehend von Lemma 2 und mit $\beta_{q_0} \leq \alpha_{q_0}$

$$D^l_{p_i,q_0} = \frac{\sin\alpha_{q_0}}{\sin\left(\frac{\gamma_i}{2} + \alpha_{q_0}\right)\cos\delta_i - \sin\frac{\gamma_i}{2}\cos\left(\delta_i + \frac{\alpha_{q_0}+\beta_{q_0}}{2}\right)}$$

$$\geq \frac{\sin\alpha_{q_0}}{\sin\left(\frac{\gamma_i}{2} + \alpha_{q_0}\right)\cos\delta_i - \sin\frac{\gamma_i}{2}\cos\left(\delta_i + \alpha_{q_0}\right)} \overset{(6)}{=} \frac{1}{\cos\left(\frac{\gamma_i}{2} - \delta_i\right)} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}.$$

Für $D^r_{p_i,q_0}$ gilt ausgehend von Lemma 2 und wiederum mit $\beta_{q_0} \leq \alpha_{q_0}$

$$D^r_{p_i,q_0} \leq \frac{\sin\beta_{q_0}}{\sin\left(\frac{\gamma_i}{2} + \beta_{q_0}\right)\cos\delta_i - \sin\frac{\gamma_i}{2}\cos\left(\delta_i + \beta_{q_0}\right)} \overset{(6)}{=} \frac{1}{\cos\left(\frac{\gamma_i}{2} - \delta_i\right)} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}.$$

Aus $D^l_{p_i,q_0} \geq \sqrt{2}$ und $D^r_{p_i,q_0} \leq \sqrt{2}$ folgt $D^l_{p_i,q_0} \geq D^r_{p_i,q_0}$ und hieraus $l_{p_i,q_0} \leq r_{p_i,q_0}$.

Für den Beweis der zweiten Bedingung, $l_{p_i,u_k} > r_{p_i,u_k}$, betrachten wir zunächst Sichtwinkel $\gamma_k \in (\gamma_i, \pi - \varrho)$, wobei ϱ den Winkel zwischen p_iv_i und v_iw_i bezeichnet; siehe Abbildung 3-7(b). Somit ist $\gamma_k + \varrho < \pi$, also $u_k \neq v_i$, und für die zu zeigende Bedingung gilt

$$|p_iv_i|g(\gamma_i) - |u_kv_i|g(\gamma_k) > |p_iw_i|g(\gamma_i) - |u_kw_i|g(\gamma_k)$$

$$(7) \quad \Leftrightarrow \quad (|u_kw_i| - |u_kv_i|)g(\gamma_k) > (|p_iw_i| - |p_iv_i|)g(\gamma_i).$$

Wir dividieren beide Seiten durch $|v_iw_i|$ und erhalten durch Anwenden des Sinussatzes in den Dreiecken $v_iu_kw_i$ und $v_ip_iw_i$ als zu zeigende Bedingung

$$\frac{\sin\varrho - \sin(\pi - \gamma_k - \varrho)}{\sin\gamma_k}\cos\left(\frac{\gamma_k}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sin\varrho - \sin(\pi - \gamma_i - \varrho)}{\sin\gamma_i}\cos\left(\frac{\gamma_i}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(8) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin\varrho - \sin(\gamma_k + \varrho)}{\sin\gamma_k}\cos\left(\frac{\gamma_k}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sin\varrho - \sin(\gamma_i + \varrho)}{\sin\gamma_i}\cos\left(\frac{\gamma_i}{2} - \frac{\pi}{4}\right) =: f(\varrho, \gamma_i).$$

Da die rechts stehende Funktion f wegen Lemma 9 (Anhang A-1) in γ_i streng monoton wächst, ist diese Bedingung erfüllt.

Für Sichtwinkel $\gamma_k \in [\pi - \varrho, \pi)$ gilt $u_k = v_i$, denn für $u_k \neq v_i$ ist $\gamma_k + \varrho < \pi$. Somit erhalten wir in diesem Fall für die zu zeigende Bedingung $l_{p_i,u_k} > r_{p_i,u_k}$, indem wir $u_k = v_i$ in (7) einsetzen,

$$(9) \quad |v_iw_i|\, g(\gamma_k) > (|p_iw_i| - |p_iv_i|)g(\gamma_i).$$

Für $\gamma_k = \pi - \varrho$ ergibt sich nach Division durch $|v_iw_i|$ und Anwenden des Sinussatzes im Dreieck $v_ip_iw_i$ Bedingung (8) für $\gamma_k = \pi - \varrho$, die mit der Argumentation von oben ebenfalls erfüllt ist. Mit wachsendem γ_k verkleinert sich die linke Seite von (9), und es sind zwei Fälle möglich. Entweder tritt Gleichheit ein, wenn γ_k sich einem festen Wert aus dem Intervall $(\pi - \varrho, \pi)$ nähert, oder aber selbst für γ_k gegen π wird keine Gleichheit erreicht. Der erste Fall bedeutet, daß sich der Weg v_i annähert, denn Gleichheit bedeutet gerade, daß $u_k = v_i$ mit p_i die *glad*-Bedingung erfüllt. Im zweiten Fall gibt es für jeden Sichtwinkel $< \pi$ einen Wegpunkt, und der Weg nähert sich einem Punkt auf v_iw_i zwischen v_i und w_i.

Für jeden Wegpunkt p_k zwischen u_k und q_0 gilt $l_{p_i,p_k} \geq l_{p_i,q_0}$ wegen $|p_kv_i| \leq |q_0v_i|$. Außerdem gilt $l_{p_i,q_0} > 0$ wegen $D^l_{p_i,q_0} \geq \sqrt{2}$ und $|p_iq_0| > 0$, so daß auch $l_{p_i,p_k} > 0$ gezeigt ist. □

Die beiden Fälle, die im obigen Beweis am Ende betrachtet wurden, sind beispielhaft in Abbildung 3-4 auf Seite 10 zu sehen. In (a) läuft der Weg auf v_i zu, und der Sichtwinkel nähert sich einem festen Wert aus dem Intervall $(\pi - \varrho, \pi)$. Hier ist ein Winkel $\sigma > 0$ eingezeichnet. Da kein Wegpunkt oberhalb der gestrichelten Halbgeraden liegt, ist kein auftretender Sichtwinkel größer als $\pi - \sigma$.

In Abbildung 3-4(b) ist der Fall gezeigt, in dem für jeden Sichtwinkel $< \pi$ ein Wegpunkt existiert.

Aus Lemma 3 folgt direkt, daß von p_1 aus immer ein Punkt erreicht werden kann, der beliebig dicht bei v_nw_n liegt, denn wenn auf dem Weg in einem Dreieck $v_ip_iw_i$ im Punkt p_j eine neue Ecke sichtbar wird, liegt ab da wieder dieselbe Situation vor wie zuvor im Punkt p_i.

3.2 Analyse der Strategie

Wir analysieren in diesem Abschnitt die Güte der Strategie *glad*. Der Grundgedanke der Beweisführung (Lemma 4 und Satz 5) findet sich bereits bei López-Ortiz und Schuierer [LOS96]; Lemma 4 wurde lediglich um die Funktion f erweitert. Dieses Lemma ist von einer konkreten Strategie unabhängig. Mit ihm läßt sich die Längenabschätzung für einen durch endlich viele Wegpunkte p_i verlaufenden Polygonzug auf eine Abschätzung für jedes Liniensegment p_ip_{i+1} zurückführen. Für den im folgenden auftretenden Winkel γ_{n+1} sei an die Definition $\gamma_{n+1} := \gamma_n$ von Seite 8 erinnert.

Lemma 4 *Seien p_i, $1 \le i \le n+1$, Wegpunkte in einem Trichter mit Anfangswinkel $\ge \pi/2$, wobei von p_i bis p_{i+1} frühestens in p_{i+1} eine neue Ecke sichtbar wird (für $i < n$). Gegeben sei eine Funktion $f : [\pi/2, \pi] \to [0,1]$, und es gelte für alle $1 \le i \le n$ im Fall $p_{n+1} = v_n$*

$$|p_iv_i|f(\gamma_i) - |p_{i+1}v_i|f(\gamma_{i+1}) > 0 \qquad \textit{und} \quad \frac{|p_ip_{i+1}|}{|p_iv_i|f(\gamma_i) - |p_{i+1}v_i|f(\gamma_{i+1})} \le c,$$

oder sonst, im Fall $p_{n+1} = w_n$,

$$|p_iw_i|f(\gamma_i) - |p_{i+1}w_i|f(\gamma_{i+1}) > 0 \quad \textit{und} \quad \frac{|p_ip_{i+1}|}{|p_iw_i|f(\gamma_i) - |p_{i+1}w_i|f(\gamma_{i+1})} \le c.$$

Dann ist die Länge des Polygonzuges Π durch die Punkte p_i, $1 \le i \le n+1$, nicht größer als $c\,|K(p_1, p_{n+1})|$.

Beweis. Wir müssen $|\Pi| / |K(p_1, p_{n+1})|$ abschätzen und betrachten den Fall, daß der Weg zur rechten Seite verläuft, also $p_{n+1} = w_n$. Der Fall für $p_{n+1} = v_n$ ist symmetrisch. Wenn in p_{i+1} keine neue Ecke sichtbar wird, ist $|w_iw_{i+1}| = 0$, sonst ist $|w_iw_{i+1}| > 0$. In beiden Fällen gilt für $0 \le i \le n-1$

$$|w_iw_{i+1}| \;=\; |p_{i+1}w_{i+1}| \;-\; |p_{i+1}w_i|; \quad \text{siehe Abbildung 2-4(b).} \tag{10}$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
|K(p_1, p_{n+1})| &= \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} |w_iw_{i+1}| \\
&\ge \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} |w_iw_{i+1}| f(\gamma_{i+1}) \\
&\overset{(10)}{=} \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \big(|p_{i+1}w_{i+1}| - |p_{i+1}w_i|\big) f(\gamma_{i+1}) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \big(|p_iw_i|f(\gamma_i) - |p_{i+1}w_i|f(\gamma_{i+1})\big) - |p_1w_0|f(\gamma_1) + |p_{n+1}w_n|f(\gamma_{n+1}) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \big(|p_iw_i|f(\gamma_i) - |p_{i+1}w_i|f(\gamma_{i+1})\big); \qquad (11)
\end{aligned}$$

für den Übergang zum letzten Schritt beachte man $|p_1w_0| = 0$ und $|p_{n+1}w_n| = 0$.

Unter Verwendung der Ungleichung $(a_1 + a_2)/(b_1 + b_2) \le \max\{a_1/b_1, a_2/b_2\}$, die für $b_1 > 0$ und $b_2 > 0$ gilt (denn für $m := \max\{a_1/b_1, a_2/b_2\}$ folgt aus $a_1 \le mb_1$ und $a_2 \le mb_2$ gerade $a_1 + a_2 \le mb_1 + mb_2$), erhalten wir

$$\frac{|\Pi|}{|K(p_1, p_{n+1})|} \overset{(11)}{\le} \frac{\sum_{i=1}^{n} |p_ip_{i+1}|}{\sum_{i=1}^{n} \big(|p_iw_i|f(\gamma_i) - |p_{i+1}w_i|f(\gamma_{i+1})\big)} \le \max_{1 \le i \le n} \frac{|p_ip_{i+1}|}{|p_iw_i|f(\gamma_i) - |p_{i+1}w_i|f(\gamma_{i+1})};$$

die für den letzten Schritt notwendige Bedingung $|p_iw_i|f(\gamma_i) - |p_{i+1}w_i|f(\gamma_{i+1}) > 0$ für $1 \le i \le n$ ist dabei nach Voraussetzung erfüllt. □

Die in Lemma 4 im Nenner auftretenden Terme (für $p_{n+1} = w_n$) sind in Abbildung 3-8 für ein Beispiel mit Wegpunkten der Strategie *glad* veranschaulicht. Die Funktion g spielt die Rolle der allgemeinen Funktion f aus Lemma 4, so daß sich der Nenner $|p_i w_i| f(\gamma_i) - |p_{i+1} w_i| f(\gamma_{i+1})$ zu $|p_i w_i| g(\gamma_i) - |p_{i+1} w_i| g(\gamma_{i+1}) = r_{p_i, p_{i+1}}$ ergibt.

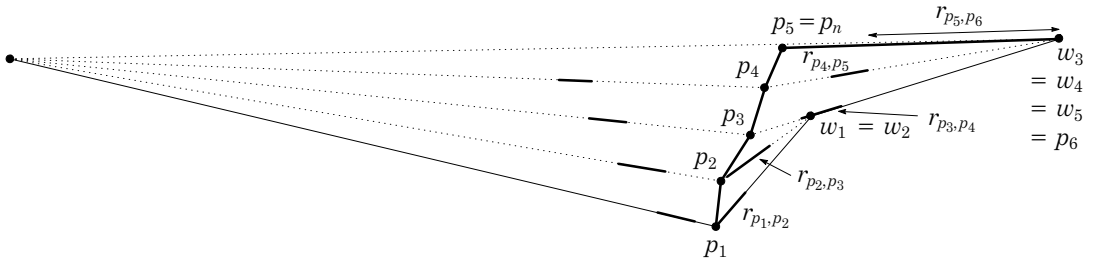


Abbildung 3-8: Ein Polygonzug Π durch endlich viele Wegpunkte.

Der kürzeste Weg $K(p_1, p_6)$ ist, wie im Beweis von Lemma 4 für den allgemeinen Fall ausgeführt, mindestens so lang wie die Strecke, die sich durch Aufsummieren der $r_{p_i,p_{i+1}}$, $1 \le i \le 5$, ergibt.

Im Beispiel ergibt sich für das Aufsummieren konkret

$$
\begin{aligned}
& |p_1w_1|g(\gamma_1) - |p_2w_1|g(\gamma_2) && (= r_{p_1,p_2}, \text{ zu dem } |p_1p_2| \text{ abgeschätzt wird})\\
+\ & |p_2w_2|g(\gamma_2) - |p_3w_2|g(\gamma_3) && (= r_{p_2,p_3}, \text{ zu dem } |p_2p_3| \text{ abgeschätzt wird})\\
+\ & |p_3w_3|g(\gamma_3) - |p_4w_3|g(\gamma_4) && (= r_{p_3,p_4}, \text{ zu dem } |p_3p_4| \text{ abgeschätzt wird})\\
+\ & |p_4w_4|g(\gamma_4) - |p_5w_5|g(\gamma_5) && (= r_{p_4,p_5}, \text{ zu dem } |p_4p_5| \text{ abgeschätzt wird})\\
+\ & |p_5w_5|g(\gamma_5) && (= r_{p_5,p_6}, \text{ zu dem } |p_5p_6| \text{ abgeschätzt wird})\\
= \ & |p_1w_1|g(\gamma_1) - |p_3w_2|g(\gamma_3) + |p_3w_3|g(\gamma_3) &&\\
= \ & |p_1w_1|g(\gamma_1) + |w_2w_3|g(\gamma_3) &&\\
\le \ & |p_1w_1| + |w_2w_3|. &&
\end{aligned}
$$

Approximiert man den *glad*-Weg durch Polygonzüge und wendet Lemma 4 an, so ergibt sich die Optimalität der Strategie *glad*, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 5 *In Trichtern mit Anfangswinkel* $\ge \pi/2$ *ist die Strategie* glad $\sqrt{2}$*-kompetitiv.*

Beweis. Wir wählen endlich viele Punkte p_i des *glad*-Weges $W(p_1, p_n)$ und den Punkt p_{n+1} aus und verbinden diese Punkte durch Liniensegmente zu einem Polygonzug. Die Länge des *glad*-Weges $W(p_1, p_{n+1})$ ist das Supremum der Längen über alle möglichen solcher Polygonzüge. Wir definieren $M(\Delta\gamma)$ als die Menge aller Polygonzüge Π, für die $\Delta\gamma$, $\Delta\gamma \in (0, \pi/2)$, eine obere Schranke für jeden Sichtwinkelzuwachs $\gamma_{i+1} - \gamma_i$ auf dem Wegabschnitt $p_i p_{i+1}$ ist; ferner sollen alle Punkte, in denen eine neue Ecke auftaucht, zur Menge der Polygonzugpunkte p_i von Π gehören.

Für die Supremumsbildung genügt es, nur Polygonzüge aus der Menge $M(\Delta\gamma)$ zu betrachten, denn jeder Polygonzug, der nicht in dieser Menge enthalten ist, läßt sich durch Einfügen weiterer Punkte zu einem Polygonzug aus $M(\Delta\gamma)$ machen.

Die Länge eines Polygonzuges Π aus $M(\Delta\gamma)$ können wir mit Hilfe von Lemma 4 abschätzen, wenn wir eine obere Schranke c für $D^l_{p_i,p_{i+1}} = |p_i p_{i+1}| / l_{p_i,p_{i+1}}$ und $D^r_{p_i,p_{i+1}} =$

$|p_i p_{i+1}| / r_{p_i,p_{i+1}}$, $1 \le i \le n$, haben, denn die Funktion g der Strategie *glad* in $l_{p_i,p_{i+1}}$ und $r_{p_i,p_{i+1}}$ erfüllt mit ihrem Zielbereich $[0,1]$ die geforderte Eigenschaft der Funktion f. Für $i = n$ ist die Abschätzung einfach; hier ergibt sich (siehe Abbildung 3-8)

$$D^r_{p_n,p_{n+1}} = \frac{|p_n p_{n+1}|}{|p_n w_n| g(\gamma_n)} = \frac{|p_n w_n|}{|p_n w_n| g(\gamma_n)} < \frac{1}{g(\pi)} = \sqrt{2}.$$

Analog gilt $D^l_{p_n,p_{n+1}} < \sqrt{2}$. Für $i < n$ erfüllen p_i und p_{i+1} die *glad*-Bedingung. Wir werden in Lemma 7 beweisen, daß für zwei solche Punkte $\sqrt{2} / (1 - \sin \alpha_{p_{i+1}})$ eine obere Schranke für $D^l_{p_i,p_{i+1}}$ und $D^r_{p_i,p_{i+1}}$ ist. Dieses vorausgesetzt können wir die Schranke $\sqrt{2}$ für $i = n$ aus der Maximumsbildung für c herauslassen und erhalten mit $\alpha_{p_{i+1}} < \alpha_{p_{i+1}} + \beta_{p_{i+1}} = \gamma_{i+1} - \gamma_i \le \Delta\gamma < \pi/2$

$$c = \max_{1 \le i < n} \frac{\sqrt{2}}{1 - \sin \alpha_{p_{i+1}}} < \frac{\sqrt{2}}{1 - \sin(\Delta\gamma)},$$

so daß mit Lemma 4 $|\Pi| \le \sqrt{2} / (1 - \sin(\Delta\gamma)) \cdot |K(p_1, p_{n+1})|$ für $\Pi \in M(\Delta\gamma)$ folgt. Da jede Menge $M(\Delta\gamma)$, $\Delta\gamma \in (0, \pi/2)$, eine obere Schranke für die Länge des *glad*-Weges liefert, erhalten wir

$$|W(p_1, p_{n+1})| \le \inf_{\Delta\gamma \in (0,\pi/2)} \frac{\sqrt{2}}{1 - \sin(\Delta\gamma)} \cdot |K(p_1, p_{n+1})| = \sqrt{2}\, |K(p_1, p_{n+1})|.$$

Es ist noch anzumerken, daß für $1 \le i < n$ die weiteren Voraussetzungen für Lemma 4, $|p_i v_i| g(\gamma_i) - |p_{i+1} v_i| g(\gamma_{i+1}) > 0$ und $|p_i w_i| g(\gamma_i) - |p_{i+1} w_i| g(\gamma_{i+1}) > 0$, also $l_{p_i,p_{i+1}} > 0$ und $r_{p_i,p_{i+1}} > 0$, wegen Lemma 3 erfüllt sind; für $i = n$ sind sie es auch. □

Um die im Beweis von Satz 5 verwendete Schranke $\sqrt{2} / (1 - \sin \alpha_{p_{i+1}})$ für $D^l_{p_i,p_{i+1}}$ und $D^r_{p_i,p_{i+1}}$ zweier Punkte, die die *glad*-Bedingung erfüllen, nachweisen zu können, benötigen wir einige Aussagen, die im Punkt p_{i+1} gelten (Lemma 6). Dem stellen wir einige Definitionen voran.

Im folgenden werden wir stets den Wegpunkt p_{i+1} betrachten, so daß wir bei $\alpha_{p_{i+1}}$ und $\beta_{p_{i+1}}$ der Übersichtlichkeit halber die Indizes weglassen. Da p_{i+1} wegen Lemma 3 im Inneren des Dreiecks $v_i p_i w_i$ liegt, α und β somit positiv sind, können wir $z := \beta/\alpha$ setzen, und es gilt $z > 0$. Wir definieren nun fünf Funktionen, auf die wir uns im Anschluß beziehen. Die Funktionen mit Querstrich sind die jeweiligen Grenzfunktionen für $\alpha \to 0$.

Definition 3 *Sei* $\delta_i := \gamma_i/2 - \pi/4$, $x \in (0, \pi/2)$, $\gamma_i \in [\pi/2, \pi)$, $z\alpha > 0$. *Die Funktionen T, A,* $\overline{A}$*, B und* $\overline{B}$*, bei denen der Übersichtlichkeit halber die (zusätzlichen) Argumente z,* γ_i *und (falls eine Abhängigkeit vorhanden)* α *weggelassen werden, seien wie folgt definiert.*

$$T(x) := \frac{\cos x - \cos\frac{\alpha + z\alpha}{2} + \tan\delta_i \sin\frac{\alpha + z\alpha}{2}}{\sin x}$$

$$A := 1 - \frac{T(z\alpha)}{\tan\frac{\gamma_i}{2}} \quad \textit{und} \quad \overline{A} := 1 - \frac{1+z}{2z} \frac{\tan\delta_i}{\tan\frac{\gamma_i}{2}}$$

$$B := \frac{T(z\alpha) - T(\alpha)}{\sin\gamma_i} \quad \textit{und} \quad \overline{B} := \frac{1+z}{2z} \tan\delta_i \frac{1-z}{\sin\gamma_i}.$$

Lemma 6 *Seien p_i und p_{i+1} zwei Punkte, die die* glad*-Bedingung erfüllen, mit zugehörigen Sichtwinkeln γ_i und γ_{i+1}, $\gamma_{i+1} > \gamma_i$, und es sei $\delta_i := \gamma_i/2 - \pi/4$. Das Segment p_ip_{i+1} teile den Winkel γ_i in die Winkel γ_i^l und γ_i^r. Dann gilt unter Verwendung der Funktionen aus Definition 3*

(a) $z \in (0, 1]$

(b) $\tan\gamma_i^l = \dfrac{A}{A+B}\tan\dfrac{\gamma_i}{2}$

(c) $A > 0$

(d) $A \le \overline{A}$ *und* $B \ge \overline{B}$.

Beweis. Beweis von $z \in (0, 1]$: $z > 0$ haben wir bereits begründet. Für die Schranke nach oben, $z \le 1$, führen wir einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, daß im Punkt p_{i+1} die Ungleichung $z > 1$ gilt. Wir zeigen, daß aus dieser Annahme $l_{p_i,p_{i+1}} > r_{p_i,p_{i+1}}$ folgt, so daß $z \le 1$ sein muß. Mit der Definition von $D^l_{p_i,q}$ und $D^r_{p_i,q}$ von Seite 9, mit Lemma 2 und mit $z > 1$ gilt

$$l_{p_i,p_{i+1}} = \frac{|p_ip_{i+1}|}{D^l_{p_i,p_{i+1}}} = |p_ip_{i+1}|\,\frac{\sin\big(\gamma_i^l+\alpha\big)\cos\delta_i - \sin\gamma_i^l\cos\big(\delta_i+\frac{\alpha+z\alpha}{2}\big)}{\sin\alpha}$$

$$> |p_ip_{i+1}|\,\frac{\sin\big(\gamma_i^l+\alpha\big)\cos\delta_i - \sin\gamma_i^l\cos(\delta_i+\alpha)}{\sin\alpha} \overset{(6)}{=} |p_ip_{i+1}|\cos\big(\gamma_i^l-\delta_i\big)$$

und analog

$$r_{p_i,p_{i+1}} = \frac{|p_ip_{i+1}|}{D^r_{p_i,p_{i+1}}} = |p_ip_{i+1}|\,\frac{\sin\big(\gamma_i^r+z\alpha\big)\cos\delta_i - \sin\gamma_i^r\cos\big(\delta_i+\frac{\alpha+z\alpha}{2}\big)}{\sin(z\alpha)}$$

$$< |p_ip_{i+1}|\,\frac{\sin\big(\gamma_i^r+z\alpha\big)\cos\delta_i - \sin\gamma_i^r\cos(\delta_i+z\alpha)}{\sin(z\alpha)} \overset{(6)}{=} |p_ip_{i+1}|\cos\big(\gamma_i^r-\delta_i\big).$$

Wir zeigen nun $\cos\big(\gamma_i^l-\delta_i\big) \ge \cos\big(\gamma_i^r-\delta_i\big)$, woraus $l_{p_i,p_{i+1}} > r_{p_i,p_{i+1}}$ folgt. Es gilt $\gamma_i^r - \delta_i \le \gamma_i - \delta_i \le \gamma_i < \pi$, und wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $\gamma_i^l - \delta_i \ge 0$. Dann gilt, wobei $\gamma_i^l \le \gamma_i^r$ eine Folgerung aus Lemma 3 ist,

$$0 \le \gamma_i^l - \delta_i \le \gamma_i^r - \delta_i < \pi \quad\Rightarrow\quad \cos\big(\gamma_i^l-\delta_i\big) \ge \cos\big(\gamma_i^r-\delta_i\big).$$

Im Fall $\gamma_i^l - \delta_i < 0$ gilt $\gamma_i^l - \delta_i \ge -\delta_i > -\pi/4$ und somit

$$\cos\big(\gamma_i^l-\delta_i\big) = \cos\big(\delta_i-\gamma_i^l\big);$$

ferner gilt

$$2\delta_i = \gamma_i - \pi/2 = \gamma_i^l + \gamma_i^r - \pi/2 < \gamma_i^l + \gamma_i^r$$
$$\Rightarrow\ \delta_i - \gamma_i^l < \gamma_i^r - \delta_i \quad\Rightarrow\quad \cos\big(\delta_i-\gamma_i^l\big) > \cos\big(\gamma_i^r-\delta_i\big).$$

Beweis von Aussage (b): Unter Verwendung von Lemma 10 (Anhang A-1) erhalten wir

$$D^l_{p_i,p_{i+1}} = D^r_{p_i,p_{i+1}} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{\cos\delta_i\cos\gamma_i^l D^r_{p_i,p_{i+1}}} = \frac{1}{\cos\delta_i\cos\gamma_i^l D^l_{p_i,p_{i+1}}}$$

$$\Leftrightarrow\ \cos\gamma_i + \sin\gamma_i T(z\alpha) + \tan\gamma_i^l\big(\sin\gamma_i - \cos\gamma_i T(z\alpha)\big) = 1 + \tan\gamma_i^l T(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow\ \tan\gamma_i^l = \frac{1 - \cos\gamma_i - \sin\gamma_i T(z\alpha)}{\sin\gamma_i - \cos\gamma_i T(z\alpha) - T(\alpha)}$$

$$= \frac{\frac{1-\cos\gamma_i}{\sin\gamma_i} - T(z\alpha)}{1 - \frac{\cos\gamma_i T(z\alpha) + T(z\alpha) - T(z\alpha) + T(\alpha)}{\sin\gamma_i}} \overset{(3)}{=} \frac{\tan\frac{\gamma_i}{2} - T(z\alpha)}{1 - \frac{T(z\alpha)}{\tan\frac{\gamma_i}{2}} + \frac{T(z\alpha)-T(\alpha)}{\sin\gamma_i}}.$$

Beweis von Aussage (c): Da im Punkt p_{i+1} wegen Lemma 3 der Winkel γ_i^l im Bereich $0 < \gamma_i^l \le \gamma_i/2 < \pi/2$ liegt, gilt $\tan\gamma_i^l > 0$, also $A\tan(\gamma_i/2)/(A+B) > 0$. Ferner gilt $\tan(\gamma_i/2) > 0$. Somit können wir $A > 0$ beweisen, indem wir zeigen, daß $A + B > 0$ gilt.

Wegen $\tan(\gamma_i/2) \ge 1$, $0 < \sin\gamma_i \le 1$ und zwei Folgerungen aus Lemma 11 (Anhang A-2), $T(z\alpha) \ge 0$ und $T(z\alpha) - T(\alpha) \ge 0$, folgt

$$A + B = 1 - \frac{T(z\alpha)}{\tan\frac{\gamma_i}{2}} + \frac{T(z\alpha) - T(\alpha)}{\sin\gamma_i} \ge 1 - T(z\alpha) + T(z\alpha) - T(\alpha) = 1 - T(\alpha)$$

und weiter mit Lemma 11

$$\ge 1 - \tfrac{1+z}{2}\tan\delta_i > 0 \quad \text{wegen } \tan\delta_i < 1 \text{ und } z \le 1 \text{ aus (a).}$$

Beweis von Aussage (d): Wegen Lemma 11 und $\tan(\gamma_i/2) > 0$ gilt

$$A = 1 - \frac{T(z\alpha)}{\tan\frac{\gamma_i}{2}} \le 1 - \frac{1+z}{2z}\frac{\tan\delta_i}{\tan\frac{\gamma_i}{2}} = \overline{A}.$$

Für B ergibt sich wiederum mit Lemma 11 und $\sin\gamma_i > 0$

$$B = \frac{T(z\alpha) - T(\alpha)}{\sin\gamma_i} \ge \frac{\tan\delta_i}{\sin\gamma_i}\left(\frac{1+z}{2z} - \frac{1+z}{2}\right) = \frac{1-z^2}{2z}\frac{\tan\delta_i}{\sin\gamma_i} = \overline{B}. \qquad \square$$

Nun können wir $D^l_{p_i,p_{i+1}}$ und $D^r_{p_i,p_{i+1}}$ für zwei Punkte p_i und p_{i+1}, die die *glad*-Bedingung erfüllen, nach oben abschätzen. Ersetzt man in $D^l_{p_i,p_{i+1}}$ (wie durch Lemma 10 im Anhang gegeben) die beiden Vorkommen von γ_i^l gemäß Lemma 6(b), so erhält man für $D^l_{p_i,p_{i+1}}$ eine Funktion in α, z und γ_i. Eine numerische Untersuchung dieser Funktion (unter Beachtung der durch Lemma 6 gegebenen Voraussetzungen $A > 0$ und $z \in (0,1]$) deutet darauf hin, daß der maximale Funktionswert $\sqrt{2}$ für $z = 1$ angenommen wird. Wir werden bei der Analyse der Funktion zunächst α aus einem Teilausdruck herausziehen, wodurch wir insgesamt als obere Schranke eine Funktion in Abhängigkeit von α, und zwar $\sqrt{2}\,/\,(1 - \sin\alpha)$, erhalten.

Lemma 7 *Seien p_i und p_{i+1} zwei Punkte, die die* glad*-Bedingung erfüllen. Dann gilt $D^l_{p_i,p_{i+1}} \le \sqrt{2}\,/\,(1-\sin\alpha)$ und $D^r_{p_i,p_{i+1}} \le \sqrt{2}\,/\,(1-\sin\alpha)$.*

Beweis. Wegen Gleichheit der Werte $D^l_{p_i,p_{i+1}}$ und $D^r_{p_i,p_{i+1}}$ genügt eine Abschätzung für einen von beiden; wir wählen $D^l_{p_i,p_{i+1}}$. Mit Lemma 10 (Anhang A-1) gilt

$$D^l_{p_i,p_{i+1}} = \frac{1}{\cos\delta_i \cos\gamma_i^l\left[1 + \tan\gamma_i^l\, T(\alpha)\right]};$$

wir ersetzen zunächst $T(\alpha)$ durch $\frac{1+z}{2}\tan\delta_i$. Da letzteres gerade die Grenzfunktion von $T(\alpha)$ für $\alpha \to 0$ ist, bezeichnen wir die so entstehende Funktion mit $\overline{D}^l_{p_i,p_{i+1}}$ (obgleich gemäß Lemma 6(b) über γ_i^l als Funktion von z, α und γ_i noch eine Abhängigkeit

von α besteht). Ein Zusammenhang zwischen $D^l_{p_i,p_{i+1}}$ und $\overline{D}^l_{p_i,p_{i+1}}$ ist in Lemma 12, Anhang A-3, gegeben: $D^l_{p_i,p_{i+1}} \le \overline{D}^l_{p_i,p_{i+1}}/(1-\sin\alpha)$. Wir benötigen also die Schranke $\sqrt{2}$ für $\overline{D}^l_{p_i,p_{i+1}}$. Es ergibt sich

$$\overline{D}^l_{p_i,p_{i+1}} = \frac{1}{\cos\gamma_i^l\cos\delta_i + \frac{1+z}{2}\sin\gamma_i^l\sin\delta_i} \overset{(5)}{=} \frac{\sqrt{1+\tan^2\gamma_i^l}}{\cos\delta_i + \frac{1+z}{2}\tan\gamma_i^l\sin\delta_i}$$

$$= \frac{\sqrt{(A+B)^2 + A^2\tan^2\frac{\gamma_i}{2}}}{(A+B)\cos\delta_i + \frac{1+z}{2}A\tan\frac{\gamma_i}{2}\sin\delta_i} \quad \text{wegen Lemma 6(b)}$$

und mit $\cos\delta_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\gamma_i}{2} + \sin\frac{\gamma_i}{2}\right)$ und $\sin\delta_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\gamma_i}{2} - \cos\frac{\gamma_i}{2}\right)$

$$= \sqrt{2}\frac{\sqrt{(A+B)^2 + A^2\tan^2\frac{\gamma_i}{2}}}{(A+B)\left(\cos\frac{\gamma_i}{2} + \sin\frac{\gamma_i}{2}\right) + \frac{1+z}{2}A\tan\frac{\gamma_i}{2}\left(\sin\frac{\gamma_i}{2} - \cos\frac{\gamma_i}{2}\right)} =: \sqrt{2}\,\frac{f_1(A,B,\gamma_i)}{f_2(A,B,\gamma_i)};$$

wir definieren den Zähler der letzten Zeile als Funktion $f_1(A,B,\gamma_i)$ und den Nenner als Funktion $f_2(A,B,\gamma_i)$. Bei der Abschätzung des Quotienten können wir $z \in (0,1]$ aus Lemma 6(a) voraussetzen und benötigen zunächst zwei Hilfsaussagen, für die wir die Ungleichung

$$(12) \qquad \frac{(1+z)^2}{4} = \frac{4z + (1-z)^2}{4} \ge z$$

verwenden. Da ferner $1 - 2\sin(\gamma_i/2)\cos(\gamma_i/2) = 1 - \sin\gamma_i \ge 0$ gilt, erhalten wir als erste Hilfsaussage

$$2\cos^2\frac{\gamma_i}{2} - \cos\gamma_i(1+z) + \frac{(1+z)^2}{4}\tan\frac{\gamma_i}{2}\left(1 - 2\sin\frac{\gamma_i}{2}\cos\frac{\gamma_i}{2}\right) - \tan\frac{\gamma_i}{2}$$

$$\overset{(12)}{\ge} 2\cos^2\frac{\gamma_i}{2} - \cos\gamma_i(1+z) + z\tan\frac{\gamma_i}{2}\left(1 - 2\sin\frac{\gamma_i}{2}\cos\frac{\gamma_i}{2}\right) - \tan\frac{\gamma_i}{2}$$

$$= 2\cos^2\frac{\gamma_i}{2} - \left(\cos^2\frac{\gamma_i}{2} - \sin^2\frac{\gamma_i}{2}\right)(1+z) + z\tan\frac{\gamma_i}{2} - 2z\sin^2\frac{\gamma_i}{2} - \tan\frac{\gamma_i}{2}$$

$$= \cos^2\frac{\gamma_i}{2}(1-z) + \sin^2\frac{\gamma_i}{2}(1-z) - \tan\frac{\gamma_i}{2}(1-z)$$

$$(13) \qquad = (1-z)\left(1 - \tan\frac{\gamma_i}{2}\right).$$

Für die zweite Hilfsaussage, die wir benötigen, verwenden wir folgend aus (1)

$$(14) \qquad \tan\gamma_i = \frac{2\tan\frac{\gamma_i}{2}}{1-\tan^2\frac{\gamma_i}{2}} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\cos\gamma_i}{\sin\gamma_i} = \frac{\tan^2\frac{\gamma_i}{2} - 1}{2\tan\frac{\gamma_i}{2}}$$

und erhalten

$$(1-z)\overline{A}\tan\frac{\gamma_i}{2}\left(1 - \tan\frac{\gamma_i}{2}\right) + 2\overline{B}\left(2\sin\frac{\gamma_i}{2}\cos\frac{\gamma_i}{2} - \frac{1+z}{2}\cos\gamma_i\tan\frac{\gamma_i}{2}\right)$$

$$= (1-z)\tan\delta_i\left[\left(\tan\frac{\gamma_i}{2} - \frac{1+z}{2z}\tan\delta_i\right)\frac{1-\tan\frac{\gamma_i}{2}}{\tan\delta_i} + \frac{1}{z}\cdot\frac{1+z}{\sin\gamma_i}\left(\sin\gamma_i - \frac{1+z}{2}\cos\gamma_i\tan\frac{\gamma_i}{2}\right)\right]$$

$$\overset{(14)}{=} \frac{1-z}{z}\tan\delta_i\left[z\tan\frac{\gamma_i}{2}\frac{1-\tan\frac{\gamma_i}{2}}{\tan\delta_i} + \frac{1+z}{2}\left(\tan\frac{\gamma_i}{2} - 1\right) + 1 + z + \frac{(1+z)^2}{4}\left(\tan^2\frac{\gamma_i}{2} - 1\right)\right]$$

und weiter mit $\tan\delta_i = \dfrac{\tan\frac{\gamma_i}{2} - 1}{1 + \tan\frac{\gamma_i}{2}} \geq 0$, $1 \geq \frac{1+z}{2} \geq z > 0$, (12) und $\tan\frac{\gamma_i}{2} \geq 1$

$$\geq \frac{1-z}{z}\tan\delta_i \Big[-z\tan\tfrac{\gamma_i}{2}\Big(\tan\tfrac{\gamma_i}{2} + 1\Big) + z\Big(\tan\tfrac{\gamma_i}{2} - 1\Big) + 2z + z\Big(\tan^2\tfrac{\gamma_i}{2} - 1\Big)\Big]$$

$$(15) = 0.$$

Wir zeigen nun die Abschätzung $f_2^2 - f_1^2 \geq 0$, woraus $1 \geq f_1^2/f_2^2$ und weiter $1 \geq f_1/f_2$ folgt. Somit gilt dann $\overline{D}^l_{p_i,p_{i+1}} \leq \sqrt{2}$. Es ergibt sich

$$f_2^2 - f_1^2 = (A+B)^2\Big(\cos\tfrac{\gamma_i}{2} + \sin\tfrac{\gamma_i}{2}\Big)^2 + 2(A+B)\Big(\sin^2\tfrac{\gamma_i}{2} - \cos^2\tfrac{\gamma_i}{2}\Big)\tfrac{1+z}{2}A\tan\tfrac{\gamma_i}{2} + \tfrac{(1+z)^2}{4}A^2\tan^2\tfrac{\gamma_i}{2}\Big(\sin\tfrac{\gamma_i}{2} - \cos\tfrac{\gamma_i}{2}\Big)^2 - (A+B)^2 - A^2\tan^2\tfrac{\gamma_i}{2}$$

und weiter mit $\cos^2\frac{\gamma_i}{2} + \sin^2\frac{\gamma_i}{2} = 1$ und $\sin^2\frac{\gamma_i}{2} - \cos^2\frac{\gamma_i}{2} = -\cos\gamma_i$

$$= (A+B)^2\Big(1 + 2\sin\tfrac{\gamma_i}{2}\cos\tfrac{\gamma_i}{2}\Big) - 2(A+B)\cos\gamma_i\tfrac{1+z}{2}A\tan\tfrac{\gamma_i}{2} + \tfrac{(1+z)^2}{4}A^2\tan^2\tfrac{\gamma_i}{2}\Big(1 - 2\sin\tfrac{\gamma_i}{2}\cos\tfrac{\gamma_i}{2}\Big) - (A+B)^2 - A^2\tan^2\tfrac{\gamma_i}{2}$$

$$\geq \big(A^2 + 2AB\big)2\sin\tfrac{\gamma_i}{2}\cos\tfrac{\gamma_i}{2} - 2(A^2 + AB)\cos\gamma_i\tfrac{1+z}{2}\tan\tfrac{\gamma_i}{2} + \tfrac{(1+z)^2}{4}A^2\tan^2\tfrac{\gamma_i}{2}\Big(1 - 2\sin\tfrac{\gamma_i}{2}\cos\tfrac{\gamma_i}{2}\Big) - A^2\tan^2\tfrac{\gamma_i}{2}$$

$$= A^2\tan\tfrac{\gamma_i}{2}\Big[2\cos^2\tfrac{\gamma_i}{2} - \cos\gamma_i(1+z) + \tfrac{(1+z)^2}{4}\tan\tfrac{\gamma_i}{2}\Big(1 - 2\sin\tfrac{\gamma_i}{2}\cos\tfrac{\gamma_i}{2}\Big) - \tan\tfrac{\gamma_i}{2}\Big] + 2AB\Big(2\sin\tfrac{\gamma_i}{2}\cos\tfrac{\gamma_i}{2} - \tfrac{1+z}{2}\cos\gamma_i\tan\tfrac{\gamma_i}{2}\Big)$$

$$\overset{(13)}{\geq} A\Big[A\tan\tfrac{\gamma_i}{2}(1-z)\Big(1 - \tan\tfrac{\gamma_i}{2}\Big) + 2B\Big(2\sin\tfrac{\gamma_i}{2}\cos\tfrac{\gamma_i}{2} - \tfrac{1+z}{2}\cos\gamma_i\tan\tfrac{\gamma_i}{2}\Big)\Big]$$

$$\geq A\Big[\overline{A}\tan\tfrac{\gamma_i}{2}(1-z)\Big(1 - \tan\tfrac{\gamma_i}{2}\Big) + 2\overline{B}\Big(2\sin\tfrac{\gamma_i}{2}\cos\tfrac{\gamma_i}{2} - \tfrac{1+z}{2}\cos\gamma_i\tan\tfrac{\gamma_i}{2}\Big)\Big]$$

wegen Lemma 6(c) und (d), $z \leq 1$, $\tan\frac{\gamma_i}{2} \geq 1$ und $\cos\gamma_i \leq 0$

≥ 0 wegen Lemma 6(c) und (15). □

Nachdem nun Satz 5 (die Optimalität der Strategie *glad*) mit Lemma 7 vollständig bewiesen ist, erhalten wir zusammen mit Lemma 1 und der unteren Schranke $\sqrt{2}$ das folgende Resultat.

Satz 8 *Für Roboter mit Sichtsystem gibt es eine optimale $\sqrt{2}$-kompetitive Strategie für die Zielsuche in Straßen. Die Strategie* glad*, kombiniert mit der Strategie* ba *oder* clad*, eingebettet in die* High-Level-*Strategie, ist eine solche Strategie.*

Literatur

[Ick94] Ch. Icking. *Motion and Visibility in Simple Polygons*. Dissertation, FernUniversität Hagen, 1994.

[Kle92] R. Klein. Walking an unknown street with bounded detour. *Computational Geometry: Theory and Applications* 1, S. 325–351, 1992.

[Kle94] J. M. Kleinberg. On-line search in a simple polygon. *Proc. of 5th ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms*, S. 8–15, 1994.

[LO96] A. López-Ortiz. *On-line Target Searching in Bounded and Unbounded Domains*. PhD thesis, Department of Computer Science, University of Waterloo, 1996.

[LOS95] A. López-Ortiz und S. Schuierer. Going home through an unknown street. *Proc. of 4th Workshop on Data Structures and Algorithms*, LNCS 955, S. 135–146, 1995.

[LOS96] A. López-Ortiz und S. Schuierer. Walking streets faster. *Proceedings of 5th Scandinavian Workshop on Algorithm Theory*, S. 345–356. LNCS 1097, 1996.

[Sch96] S. Schuierer. Eine Variation der Strategie *babco*. Manuskript, 1996.

[Sem96] I. Semrau. Analyse und experimentelle Untersuchung von Strategien zum Finden eines Ziels in Straßenpolygonen. Diplomarbeit, FernUniversität Hagen, 1996.

[ST85] D. D. Sleator und R. E. Tarjan. Amortized efficiency of list update and paging rules. *Communications of the ACM*, 28(2):202–208, 1985.

Anhang

Lemma 9 *Die Funktion* $f(\varrho,\gamma) = \dfrac{\sin\varrho - \sin(\gamma+\varrho)}{\sin\gamma}\cos\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ *ist für* $\gamma \in [\pi/2,\pi)$ *und* $\varrho \in (0,\pi/2]$ *streng monoton wachsend in* γ.

Beweis. Für die partielle Ableitung nach γ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial\gamma} = \frac{-\cos(\gamma+\varrho)\sin\gamma - (\sin\varrho - \sin(\gamma+\varrho))\cos\gamma}{\sin^2\gamma}\cos\left(\tfrac{\gamma}{2}-\tfrac{\pi}{4}\right) - \frac{\sin\varrho - \sin(\gamma+\varrho)}{2\sin\gamma}\sin\left(\tfrac{\gamma}{2}-\tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\sin\varrho(1-\cos\gamma)}{\sin^2\gamma}\cos\left(\tfrac{\gamma}{2}-\tfrac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\frac{\sin\varrho(1-\cos\gamma) - \cos\varrho\sin\gamma}{\sin\gamma}\sin\left(\tfrac{\gamma}{2}-\tfrac{\pi}{4}\right)$$

und weiter mit $\sin^2\gamma \le \sin\gamma$, $\cos\varrho\sin\gamma \ge 0$ und $\sin\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \le \cos\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$, $\frac{\gamma}{2}-\frac{\pi}{4} \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

$$\ge \frac{\sin\varrho(1-\cos\gamma)}{\sin\gamma}\cos\left(\tfrac{\gamma}{2}-\tfrac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\frac{\sin\varrho(1-\cos\gamma)}{\sin\gamma}\cos\left(\tfrac{\gamma}{2}-\tfrac{\pi}{4}\right) > 0.$$

□

Im folgenden wird auch hier bei $\alpha_{p_{i+1}}$ der Index fortgelassen.

Lemma 10 *Seien* p_i *und* p_{i+1} *zwei Punkte, die die* glad*-Bedingung erfüllen*[1]*, mit zugehörigen Sichtwinkeln* γ_i *und* γ_{i+1}, $\gamma_{i+1} > \gamma_i$, *und es sei* $\delta_i := \gamma_i/2 - \pi/4$. *Das Segment* p_ip_{i+1} *teile den Winkel* γ_i *in die Winkel* γ_i^l *und* γ_i^r, *und die Funktion* T *sei wie in Definition 3 gegeben. Dann gilt*

$$D^l_{p_i,p_{i+1}} = \frac{1}{\cos\delta_i\cos\gamma_i^l\left[1 + \tan\gamma_i^l\,T(\alpha)\right]}$$

$$D^r_{p_i,p_{i+1}} = \frac{1}{\cos\delta_i\cos\gamma_i^l\left[\cos\gamma_i + \sin\gamma_i\,T(z\alpha) + \tan\gamma_i^l(\sin\gamma_i - \cos\gamma_i\,T(z\alpha))\right]}.$$

Beweis. Zunächst gilt

$$\sin(y+x)\cos\delta_i - \sin y\cos\left(\delta_i + \tfrac{\alpha+z\alpha}{2}\right)$$

$$= (\sin y\cos x + \cos y\sin x)\cos\delta_i - \sin y\left(\cos\delta_i\cos\tfrac{\alpha+z\alpha}{2} - \sin\delta_i\sin\tfrac{\alpha+z\alpha}{2}\right)$$

$$= \cos\delta_i\left[\sin y\left(\cos x - \cos\tfrac{\alpha+z\alpha}{2} + \tan\delta_i\sin\tfrac{\alpha+z\alpha}{2}\right) + \cos y\sin x\right]$$

$$(16)\quad = \cos\delta_i\sin x\left[\sin y\,T(x) + \cos y\right].$$

Ausgehend von Lemma 2 ergibt sich

$$\frac{1}{D^l_{p_i,p_{i+1}}} = \frac{\sin(\gamma_i^l+\alpha)\cos\delta_i - \sin\gamma_i^l\cos\left(\delta_i + \frac{\alpha+z\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}$$

$$\overset{(16)}{=} \frac{\cos\delta_i\sin\alpha\left[\sin\gamma_i^l\,T(\alpha) + \cos\gamma_i^l\right]}{\sin\alpha} = \cos\delta_i\cos\gamma_i^l\left[\tan\gamma_i^l\,T(\alpha) + 1\right].$$

[1] Hier wäre bereits die Forderung ausreichend, daß p_{i+1} ein beliebiger Punkt im Inneren des Dreiecks $v_ip_iw_i$ ist.

Wiederum ausgehend von Lemma 2 ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D^r_{p_i,p_{i+1}}} &= \frac{\sin(\gamma_i^r + z\alpha)\cos\delta_i - \sin\gamma_i^r\cos\left(\delta_i + \frac{\alpha+z\alpha}{2}\right)}{\sin(z\alpha)} \\
&\overset{(16)}{=} \cos\delta_i\left[\sin\gamma_i^r T(z\alpha) + \cos\gamma_i^r\right] \\
&= \cos\delta_i\left[\sin(\gamma_i - \gamma_i^l)T(z\alpha) + \cos(\gamma_i - \gamma_i^l)\right] \\
&= \cos\delta_i\left[\sin\gamma_i\cos\gamma_i^l T(z\alpha) - \cos\gamma_i\sin\gamma_i^l T(z\alpha) + \cos\gamma_i\cos\gamma_i^l + \sin\gamma_i\sin\gamma_i^l\right] \\
&= \cos\delta_i\cos\gamma_i^l\left[\cos\gamma_i + \sin\gamma_i T(z\alpha) + \tan\gamma_i^l(\sin\gamma_i - \cos\gamma_i T(z\alpha))\right]. \qquad \square
\end{aligned}$$

Lemma 11 *Sei T die Funktion aus Definition 3, $z \in (0,1]$, $0 < \alpha + z\alpha < \pi/2$ und $\delta_i \in [0, \pi/4)$. Dann gilt*

$$T(\alpha) \le \tfrac{1+z}{2}\tan\delta_i \quad \textit{und} \quad T(z\alpha) \ge \tfrac{1+z}{2z}\tan\delta_i.$$

Beweis. Wir benötigen die Aussage:

(17) Die Funktion $\cos x + \sin x$ ist für $x \in [0, \pi/4]$ monoton wachsend.

Dieses gilt, da die Ableitung, $-\sin x + \cos x$, nicht negativ ist. Wir werden die Funktion auf drei Argumente aus $(0, \pi/4)$, für die zudem $z\alpha \le (\alpha + z\alpha)/2 \le \alpha$ gilt, anwenden.

Für den Beweis von $T(\alpha) \le \frac{1+z}{2}\tan\delta_i$ zeigen wir

$$\begin{aligned}
f_1(z,\delta_i,\alpha) &:= \left(T(\alpha) - \tfrac{1+z}{2}\tan\delta_i\right)\sin\alpha \\
&= \cos\alpha - \cos\tfrac{\alpha+z\alpha}{2} + \tan\delta_i\sin\tfrac{\alpha+z\alpha}{2} - \tfrac{1+z}{2}\tan\delta_i\sin\alpha \le 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial\alpha} &= -\sin\alpha + \tfrac{1+z}{2}\sin\tfrac{\alpha+z\alpha}{2} + \tfrac{1+z}{2}\tan\delta_i\cos\tfrac{\alpha+z\alpha}{2} - \tfrac{1+z}{2}\tan\delta_i\cos\alpha \\
&\le -\sin\alpha + \sin\tfrac{\alpha+z\alpha}{2} + \cos\tfrac{\alpha+z\alpha}{2} - \cos\alpha \quad \text{wegen } \tan\delta_i < 1,\ \tfrac{1+z}{2} \le 1 \\
&\overset{(17)}{\le} -\sin\alpha + \sin\alpha + \cos\alpha - \cos\alpha = 0.
\end{aligned}$$

Aus $\partial f_1/\partial\alpha \le 0$ folgt $f_1(z,\delta_i,\alpha) \le \lim_{\alpha\to 0} f_1(z,\delta_i,\alpha) = 0$. Es gilt $\sin\alpha > 0$, und mit Division von f_1 durch $\sin\alpha$ folgt die Behauptung.

Für den Beweis von $T(z\alpha) \ge \frac{1+z}{2z}\tan\delta_i$ zeigen wir

$$f_2(z,\delta_i,\alpha) := \cos(z\alpha) - \cos\tfrac{\alpha+z\alpha}{2} + \tan\delta_i\sin\tfrac{\alpha+z\alpha}{2} - \tfrac{1+z}{2z}\tan\delta_i\sin(z\alpha) \ge 0.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial\alpha} &= -z\sin(z\alpha) + \tfrac{1+z}{2}\sin\tfrac{\alpha+z\alpha}{2} + \tfrac{1+z}{2}\tan\delta_i\cos\tfrac{\alpha+z\alpha}{2} - \tfrac{1+z}{2}\tan\delta_i\cos(z\alpha) \\
&\ge \tfrac{1+z}{2}\left(-\sin(z\alpha) + \sin\tfrac{\alpha+z\alpha}{2} + \cos\tfrac{\alpha+z\alpha}{2} - \cos(z\alpha)\right) \quad \text{wegen } \tan\delta_i < 1,\ z \le \tfrac{1+z}{2} \\
&\overset{(17)}{\ge} \tfrac{1+z}{2}\left(-\sin(z\alpha) + \sin(z\alpha) + \cos(z\alpha) - \cos(z\alpha)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Aus $\partial f_2/\partial\alpha \ge 0$ folgt $f_2(z,\delta_i,\alpha) \ge \lim_{\alpha\to 0} f_2(z,\delta_i,\alpha) = 0$. Es gilt $\sin(z\alpha) > 0$, und mit Division von f_2 durch $\sin(z\alpha)$ folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 12 *Seien p_i und p_{i+1} zwei Punkte, die die* glad*-Bedingung erfüllen, mit zugehörigen Sichtwinkeln γ_i und γ_{i+1}, $\gamma_{i+1} > \gamma_i$, und es sei $\delta_i := \gamma_i/2 - \pi/4$. Das Segment p_ip_{i+1} teile den Winkel γ_i in die Winkel γ_i^l und γ_i^r. Dann gilt*

$$D^l_{p_i,p_{i+1}} \le \frac{\overline{D}^l_{p_i,p_{i+1}}}{1-\sin\alpha} \quad \textit{mit} \quad \overline{D}^l_{p_i,p_{i+1}} := \frac{1}{\cos\gamma_i^l\cos\delta_i + \frac{1+z}{2}\sin\gamma_i^l\sin\delta_i}.$$

Beweis. Wir können wegen Lemma 6(a) $z \in (0,1]$ voraussetzen und benötigen die folgenden beiden Abschätzungen.

(18) $f(z,\alpha) := \sin\frac{\alpha+z\alpha}{2} - \frac{1+z}{2}\sin\alpha \ge 0$

Beweis: $\frac{\partial f}{\partial\alpha} = \frac{1+z}{2}\cos\frac{\alpha+z\alpha}{2} - \frac{1+z}{2}\cos\alpha \ge 0$, also folgt $f(z,\alpha) \ge \lim_{\alpha\to 0} f(z,\alpha) = 0$.

(19) $2\cos\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\gamma_i}{2} + \tan\delta_i \ge 2\sin\frac{\gamma_i}{2}\cot\frac{\gamma_i}{2} + \tan\left(\frac{\gamma_i}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ wegen $\alpha < \pi - \gamma_i$

$$= 2\cos\frac{\gamma_i}{2} + \frac{\sin\frac{\gamma_i}{2} - \cos\frac{\gamma_i}{2}}{\cos\frac{\gamma_i}{2} + \sin\frac{\gamma_i}{2}} \ge \frac{2\cos\frac{\gamma_i}{2} + \sin\frac{\gamma_i}{2} - \cos\frac{\gamma_i}{2}}{\cos\frac{\gamma_i}{2} + \sin\frac{\gamma_i}{2}} = 1;$$

dabei haben wir $\cos\frac{\gamma_i}{2} + \sin\frac{\gamma_i}{2} \ge 1$ benutzt, was aus $\frac{1-\cos\frac{\gamma_i}{2}}{\sin\frac{\gamma_i}{2}} = \tan\frac{\gamma_i}{4} \le 1$ folgt.

Wegen Lemma 2 gilt $D^l_{p_i,p_{i+1}} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma_i^l)\cos\delta_i - \sin\gamma_i^l\cos\left(\delta_i + \frac{\alpha+z\alpha}{2}\right)}$.

Da der Wegpunkt p_{i+1} wegen Lemma 3 links von oder auf der Winkelhalbierenden von γ_i liegt, gilt $\gamma_i^l \le \gamma_i/2$. Wir erhalten zunächst

$$\frac{\overline{D}^l_{p_i,p_{i+1}}}{D^l_{p_i,p_{i+1}}} = \frac{\sin(\alpha+\gamma_i^l)\cos\delta_i - \sin\gamma_i^l\cos\left(\delta_i + \frac{\alpha+z\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha\left(\cos\gamma_i^l\cos\delta_i + \frac{1+z}{2}\sin\gamma_i^l\sin\delta_i\right)};$$

wegen Lemma 3 gilt ferner $l_{p_i,p_{i+1}} > 0$ und somit $D^l_{p_i,p_{i+1}} > 0$, so daß der Zähler positiv ist; wegen $\gamma_i^l \le \gamma_i/2 < \pi/2$ und $\sin\alpha > 0$ ist auch der Nenner positiv; somit erhalten wir durch Vergrößerung des Nenners

$$\overset{(18)}{\ge} \frac{\left(\sin\alpha\cos\gamma_i^l\cos\delta_i + \left(\cos\alpha - \cos\frac{\alpha+z\alpha}{2}\right)\sin\gamma_i^l\cos\delta_i\right) + \sin\gamma_i^l\sin\delta_i\sin\frac{\alpha+z\alpha}{2}}{\sin\alpha\cos\gamma_i^l\cos\delta_i + \sin\gamma_i^l\sin\delta_i\sin\frac{\alpha+z\alpha}{2}}$$

$$= 1 - \frac{\cos\frac{\alpha+z\alpha}{2} - \cos\alpha}{\sin\alpha\cot\gamma_i^l + \sin\frac{\alpha+z\alpha}{2}\tan\delta_i}$$

$$> 1 - \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha}{\sin\alpha\cot\frac{\gamma_i}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\tan\delta_i} \quad \text{wegen } \gamma_i^l \le \tfrac{\gamma_i}{2},\ z\alpha > 0 \text{ und } \alpha + z\alpha < \pi/2$$

$$= 1 - \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\gamma_i}{2} + \tan\delta_i\right)} \overset{(19)}{\ge} 1 - \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\ge 1 - \frac{\cos\frac{\alpha}{2}(1-\cos\alpha)}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 1 - \frac{1-\cos\alpha}{\tan\frac{\alpha}{2}} \overset{(3)}{=} 1 - \sin\alpha.$$

Wegen $1 - \sin\alpha > 0$ und $D^l_{p_i,p_{i+1}} > 0$ folgt $D^l_{p_i,p_{i+1}} \le \overline{D}^l_{p_i,p_{i+1}}/(1-\sin\alpha)$. □